НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

№ 3 (104) ✧ 2009

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Журнал выпускается при научно-методическом руководстве Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской Академии наук

Журнал включен в перечень научных и научно-технических изданий ВАК России и в Российский индекс научного цитирования

Издается с 1999 г.

Учредитель:
Издательство "Новые технологии"

СОДЕРЖАНИЕ

Информация о журнале доступна на сайте журнала:
http://www.microsystems.ru. http://eLIBRARY.ru

ПОДПИСКА:

- по каталогу Роспечати (индекс **79493**);
- по каталогу "Пресса России" (индекс **27849**)
- в редакции журнала (тел./факс: (499) 269-55-10)

Адрес для переписки:
e-mail: nmst@novtex.ru

УДК 535.215.1

А. Н. Волобуев, д-р техн. наук, проф.,
Самарский государственный университет,
А. В. Скворцов, канд. техн. наук, проф.,
Московский государственный открытый университет,
e-mail:skvortsov_av@mail.ru

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В НАНОПЛЕНКАХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Исследуется угловое распределение энергии и скорости фотоэлектронов при внутреннем фотоэффекте для двух вариантов: квант света проявляет в основном волновые свойства и в основном корпускулярные свойства при взаимодействии с орбитальным электроном. Показано различие в угловом распределении фотоэлектронов для этих вариантов. Угловое распределение во втором варианте исследовано для нерелятивистского и релятивистского случаев.

Ключевые слова: *электрон, фотон, квантовое взаимодействие, металлическая пленка*

Введение

В технике имеется много приложений, в которых происходит взаимодействие фотонов электромагнитного излучения и электронов с металлическими пленками нанометрических размеров, например, в лазерных зеркалах, фотоэлементах и других изделиях фотоники. Жесткое электромагнитное излучение может проникать в металлы на значительную глубину, в частности, в изделиях атомной техники и термоядерной энергетики. Во всех случаях необходимо исследовать возникающие эффекты отражения и преломления излучения, фотоэлектричества, структурно-фазовых превращений в металлах с накоплением дефектов, образованием градиентов температур и температурных полей в объемном представлении с использованием CAE-систем CALS/ИПИ-технологий. Многие элементы фотоники используют пленки нанометрической толщины, находящиеся в состоянии сверхпроводимости, которое может быть нарушено под действием теплоты, возникающей от электромагнитного излучения высокой интенсивности при воздействии фотоэлектронов.

Например, при конструировании фотоэлементов возникает проблема получения максимального фототока при облучении металла потоком электромагнитного излучения. Глубина проникновения излучения в металл при облучении его поверхности определяется законом Бугера [1]:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{4\pi}{\lambda} n\chi z\right),$$

где I_0 — интенсивность падающей волны; I — интенсивность волны на координате z, которая направлена в глубь металла; λ — длина волны излучения; n_χ — произведение показателя преломления на коэффициент экстинкции.

Оценим толщину металла, при которой интенсивность света уменьшается в $\mathbf{e}$ = 2,718 раз:

$$z = \frac{\lambda}{4\pi n\chi}.$$

Средняя длина волны видимого света λ = 550 нм, $n\chi$ = 2,83 для золота. Поэтому для золота z = 15,5 нм. Учитывая [2], что период кристаллической решетки для золота a = 0,408 нм, можно заключить, что электромагнитное излучение проникает в металл на глубину ~40 атомарных слоев.

Поэтому взаимодействие излучения происходит в основном с верхними слоями атомов, т. е. на уровне нанометрической размерности. Подобные физико-технические закономерности используются в различных приложениях.

Вследствие этого представляет интерес рассмотрение углового распределения энергии и скорости фотоэлектронов при внутреннем фотоэффекте. В частности, такое распределение определяет температурное состояние нанослоев металла и целого ряда неметаллических материалов, например, полупроводников, стекла, на которое напылены металлические пленки, и т. п.

Нерелятивистский случай

Несмотря на то, что природа фотоэффекта была объяснена Эйнштейном еще в начале XX века, различные аспекты этого явления до сих пор привлекают внимание, например, в [3] исследуется роль туннельного эффекта при фотоэлектронном взаимодействии.

Например, в [4] на основе расчетного метода диаграмм Фейнмана делается вывод, что вылет фотоэлектронов вперед по направлению движения фотона и назад в приближении главного порядка при однократном фотоэффекте отсутствует. В [5] также указывается, что в направлении распространения кванта фотоэлектроны не вылетают. Подобные факты свидетельствуют о том, что указанные фотон-

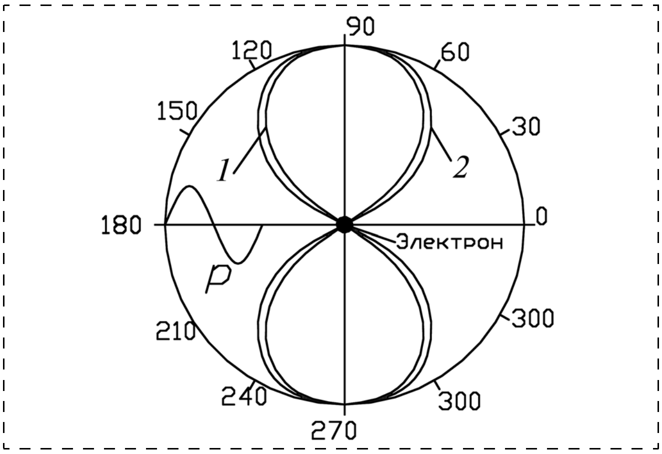


Рис. 2. Угловое распределение фотоэлектронов при взаимодействии орбитальных электронов с электромагнитной волной

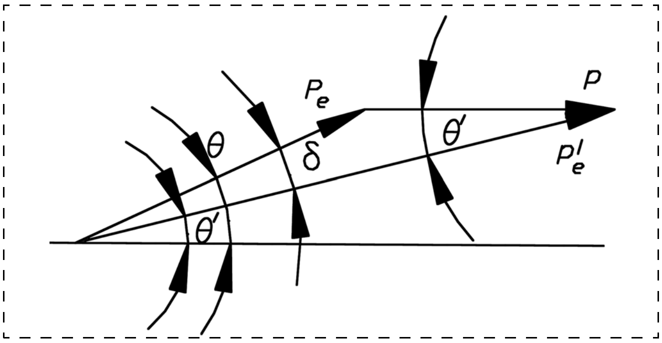


Рис. 3. Учет импульса кванта при использовании волнового приближения взаимодействия электрона с электромагнитной волной

электронные взаимодействия следует исследовать значительно подробнее.

Импульс вылетевшего электрона согласно [5] определяется в основном действием на электрон электрического вектора кванта света. В случае, если электрон вылетает в направлении электрического вектора кванта, он приобретает импульс p_e. В плоскости, расположенной под углом φ к плоскости поляризации кванта света (рис. 1), значение импульса электрона будет $p_{1m} = p_e \cos\varphi$. Если импульс электрона, кроме того, направлен под углом θ к направлению кванта света, то его значение составит

$$p_1 = p_e \cos\varphi \sin\theta. \qquad (1)$$

Следовательно, энергия фотоэлектрона

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_e^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta}{2m_1}, \qquad (2)$$

где m_1 — масса электрона.

При $\theta = 0$ энергия фотоэлектронов $E_1 = 0$. Фотоэлектроны в максимальной степени вылетают в направлении светового вектора или вектора поляризации, т. е. вектора напряженности электрического поля кванта света. Такая же зависимость предлагается и в [6]. Формула (2) носит упрощенный характер по сравнению с формулами работ [5, 6], но верно передает основную зависимость энергии распределения вылета фотоэлектронов от углов φ и θ.

Зависимость (2) имеет тот недостаток, что при ее выводе не использовался закон сохранения импульса, поэтому и отсутствует движение электрона в направлении $\theta = 0$. Использование уравнения сохранения импульса в [5, 6] не может считаться удовлетворительным, так как в проведенном авторами анализе оно носит вспомогательный характер. В основе анализа [5, 6] лежит переход электрона из дискретного энергетического спектра в состояние непрерывного спектра под влиянием гармонического возмущения, т. е. матричный элемент оператора возмущения является гармонической функцией времени. Другими словами, упор делается на волновую природу кванта, взаимодействующего с электроном. Угловое распределение энергии электронов в относительных единицах, построенное по формуле (2), показано на рис. 2 (кривая *1*).

Проиллюстрируем возникновение поправки к формуле (2), связанной с наличием импульса фотона p, следуя [7]. На рис. 3 показано изменение импульса фотоэлектрона p_e при наличии импульса фотона. Из рисунка следует $\theta = \theta' + \delta$. Найдем $\sin\theta = \sin\theta'\cos\delta + \sin\delta\cos\theta'$. Полагая, что δ мало, имеем

$$\sin\theta = \sin\theta'\left(1 + \frac{\sin\delta\cos\theta'}{\sin\theta'}\right) = \sin\theta'\left(1 + \frac{p}{p_e}\cos\theta'\right).$$

При этом использована теорема синусов для треугольника, представленного на рис. 3. Далее, считая

$$\beta' = \frac{p}{p_e} = \frac{h\nu}{mVc} = \frac{1}{2}\beta = \frac{A_{\text{вых}}}{mVc},$$

где h — постоянная Планка; $\beta = \frac{V}{c}$ — отношение скорости фотоэлектрона к скорости света в вакууме; ν — частота; $A_{\text{вых}}$ — работа выхода электрона из атома, имеем

$$\sin\theta = \sin\theta'(1 + \beta'\cos\theta').$$

Учитывая малость β′, формулу (2) преобразуем к виду

$$E_1 = \frac{p_e^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta'}{2m_1}(1 + 2\beta'\cos\theta').$$

Угловое распределение энергии электронов для $\beta' = 0{,}15$, построенное по формуле (2) с учетом поправки, показано на рис. 2 (кривая *2*). При этом

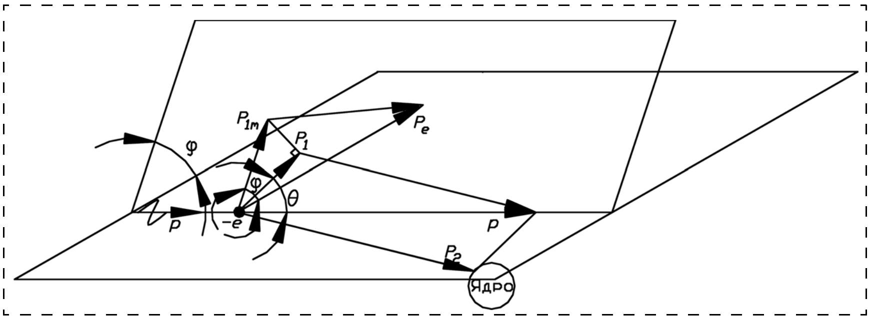


Рис. 1. Направление векторов импульсов частиц при внутреннем фотоэффекте

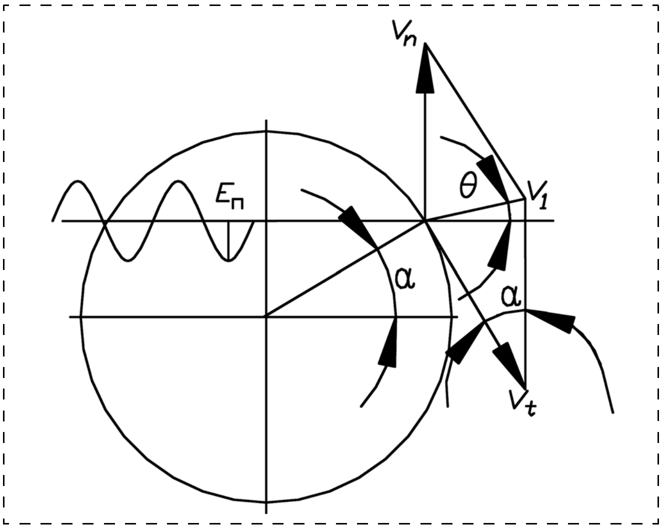


Рис. 4. Направление составляющих скорости орбитального электрона при его взаимодействии с электромагнитной волной

индикатриса рассеяния фотоэлектронов получила некоторый наклон вперед, но в направлении импульса кванта, т. е. при $\theta = 0$ электроны, как и прежде, не вылетают.

Формула (2) объясняется именно на основе волновой природы света. Для доказательства этого положения рассмотрим взаимодействие электромагнитной волны с орбитальным электроном. Описание орбитального движения электрона проводим на основе полуклассической теории Бора, так как процесс взаимодействия электрона с электромагнитной волной исследуем с позиций классической физики (рис. 4).

По теореме синусов из треугольника скоростей найдем:

$$\sin\alpha = \frac{V_1}{V_t}\cos\theta, \qquad (3)$$

где V_t — скорость движения электрона вокруг ядра; V_1 — суммарная скорость электрона с учетом действия на него электромагнитной волны.

По теореме косинусов имеем:

$$V_1^2 = V_n^2 + V_t^2 - 2V_nV_t\cos\alpha =$$
$$= V_n^2 + V_t^2 - 2V_nV_t\sqrt{1-\left(\frac{V_1}{V_t}\cos\theta\right)^2}, \qquad (4)$$

где V_n — составляющая общей скорости движения электрона после его отрыва от ядра, которая возникает под действием напряженности электрического поля $E_п$ в электромагнитной волне.

Решая (4) относительно V_1, находим:

$$\left(V_1^2\right) = \left(V_n^2 + V_t^2 - 2V_n^2\cos^2\theta\right) +$$
$$+ \sqrt{\left(V_n^2 + V_t^2 - 2V_n^2\cos^2\theta\right)^2 - \left(V_n^2 - V_t^2\right)^2}. \qquad (5)$$

В соответствии с теорией Бора сила притяжения электрона к ядру уравновешивается центробежной силой инерции, действующей на электрон. При этом электрон движется со скоростью V_t (аналог первой космической скорости). Отрыв электрона от ядра произойдет, если кинетическая энергия электрона за счет действия напряженности электрического поля $E_п$ в электромагнитной волне станет равной электрической энергии связи электрона с ядром. При этом скорость электрона становится равной V_n (аналог второй космической скорости). Известно, что $V_n = V_t\sqrt{2}$. Однако полной аналогии системы ядро—электрон с космической системой даже в теории Бора нет. Это связано с тем, что имеется постулат Бора, фиксирующий скорость электрона на данной орбите атома при определенном квантовом числе. Поэтому условие отрыва электрона от атома при любом положении электрона нужно принять в виде $V_n \geqslant V_t$.

В случае равенства скоростей $V_n = V_t$ имеем:

$$V_1 = 2V_n\sin\theta. \qquad (6)$$

Распределение скоростей (6) соответствует (2) и рис. 2 (кривая *1*). Таким образом, соотношение (6) возникает, если учитывать только волновую природу электромагнитной волны, взаимодействующей с орбитальным электроном.

В [8] распределение угла вылета электронов исследовано для релятивистского случая. При этом получено, что электроны испускаются преимущественно в направлении распространения фотона. Однако этот вывод также фактически основывается на формуле (1). Поэтому недостаток вывода [8] проявляется в отсутствии в окончательных формулах углового распределения электронов массы ядра m_2. А ведь масса ядра определяет долю импульса фотона, которую может взять на себя ядро.

Рассмотрим явление внутреннего фотоэффекта с позиций корпускулярного представления кванта света (см. рис. 1). Квант света импульсом p и энергией E выбивает электрон из атома, совершая работу выхода $A_{вых}$. При этом должны соблюдаться как закон сохранения энергии

$$E = A_{вых} + E_1 + E_2, \qquad (7)$$

где E_1 — кинетическая энергия вылетевшего электрона, E_2 — кинетическая энергия ядра, так и закон сохранения импульса

$$p = p_1 + p_2, \qquad (8)$$

где p_1 — импульс вылетевшего электрона; p_2 — импульс, переданный ядру.

Формула (7) несколько отличается от общепринятой формулы Эйнштейна $E = A_{вых} + E_1$. Дело в том, что формула Эйнштейна подразумевает отсутствие углового распределения скорости фотоэлектронов. Действительно, если задана энергия фотона E и определена работа выхода $A_{вых}$ для данного химического элемента, то тем самым задана определенная скорость вылета электрона из атома. Это означает, что скорости электронов, вылетающих во всевозможных направлениях, одинаковы, и задача нахождения их углового распределения становится некорректной.

Импульс, переданный ядру, можно найти по формуле, следующей из (8):

$$p_2^2 = p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\theta. \qquad (9)$$

Для совместного решения системы уравнений (7) и (9) уравнение (9) удобно выразить через энергии. Учитывая $E = pc$, где c — скорость света в вакууме, $p_1^2 = 2m_1E_1$ и $p_2^2 = 2m_2E_2$, находим:

$$2m_2E_2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + 2m_1E_1 - 2\frac{E}{c}\sqrt{2m_1E_1}\cos\theta, \qquad (10)$$

где m_1 — масса электрона; m_2 — масса ядра.

Подставляя в (10) кинетическую энергию ядра E_2 из (7), получаем:

$$E - A_{\text{вых}} - E_1 =$$

$$= \frac{1}{2m_2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \frac{m_1}{m_2}E_1 - \frac{E}{m_2c}\sqrt{2m_1E_1}\cos\theta. \qquad (11)$$

Введем обозначения $G = \sqrt{E_1}$, $\alpha = \frac{E}{m_2c}\sqrt{2m_1}$, $\sigma = 1 + \frac{m_1}{m_2}$, $\gamma = \frac{1}{2m_2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 + A_{\text{вых}} - E$. Тогда уравнение (11) преобразуется к виду

$$\beta G^2 - \alpha G\cos\theta + \gamma = 0. \qquad (12)$$

Решая квадратное уравнение (12) при условии $\sigma \approx 1$ (масса электрона значительно меньше массы ядра), находим:

$$G_{1,2} = \frac{\alpha}{2}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\cos^2\theta - \gamma}. \qquad (13)$$

Подставляя в (13) принятые обозначения, получаем

$$G_{1,2} = \sqrt{\frac{m_1}{2}}\frac{E}{m_2c}\cos\theta \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{E^2}{2m_2c^2}\left(\frac{m_1}{m_2}\cos^2\theta - 1\right) + E - A_{\text{вых}}}. \qquad (14)$$

Учитывая, что $G = \sqrt{E_1} = V_1\sqrt{\frac{m_1}{2}}$, где V_1 — скорость фотоэлектронов, а также условие $\frac{m_1}{m_2}\cos^2\theta \ll 1$, находим:

$$V_1 = \frac{E}{m_2c}\cos\theta \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}\cos^2\theta - 1\right)\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{E}{m_2c}\right)^2 + \frac{2(E - A_{\text{вых}})}{m_1}}. \qquad (15)$$

При стремлении массы ядра к бесконечности $m_2 \to \infty$ формула (15) переходит в стандартный закон Эйнштейна для фотоэффекта. Кроме того, при этом, как уже указывалось ранее, исчезает угловое распределение скорости фотоэлектронов.

Условие $m_2 \to \infty$ справедливо при внешнем фотоэффекте, когда импульс фотона передается через отдельные атомы всему металлу в целом. Поэтому для внешнего фотоэффекта, т. е. для взаимодействия твердого тела и фотона, формула Эйнштейна $E = A_{\text{вых}} + E_1$ применима абсолютно.

Для внутреннего фотоэффекта в формуле (15) нужно использовать эффективную массу ядра $m_{2\text{эфф}} > m_2$, учитывающую силы притяжения между атомами в веществе.

Преобразуя (16), получаем

$$V_1 =$$

$$= \frac{E}{m_2c}\left(\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \frac{m_2}{m_1}\left(2(E - A_{\text{вых}})\frac{m_2c^2}{E^2} - 1\right)}\right). \qquad (16)$$

Обозначим $\Delta = E - A_{\text{вых}}$. Распределение фотоэлектронов будет возникать при $\Delta \geqslant \frac{E^2}{2m_2c^2}$. В правой части полученного неравенства стоит очень маленькая величина, поэтому распределение фотоэлектронов возникнет практически при $E > A_{\text{вых}}$.

Обозначим $\Delta = \eta\frac{E^2}{2m_2c^2}$, где $\eta \geqslant 1$ характеризует превышение энергии фотона над работой выхода в относительных единицах. При этом формула (16) приобретает вид:

$$V_1 = \frac{E}{m_2c}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \frac{m_2}{m_1}(\eta - 1)}\right). \qquad (17)$$

Анализ формулы (17) показывает, что перед корнем надо брать знак плюс, так как иначе рассеяние электронов в основном идет в сторону, обратную направлению падающего фотона.

На рис. 5 показано угловое распределение вылета электронов при внутреннем фотоэффекте в относительных единицах $\frac{V_1}{E/m_2c}$, построенное по формуле (17) при нескольких значениях η для меди. Из рисунка видно, что скорости фотоэлектронов становятся практически одинаковыми во всех направлениях уже при $\eta \geqslant 1{,}01$, после чего формула Эйнштейна $E = A_{\text{вых}} + E_1$ становится справедливой и для внутреннего фотоэффекта. Учитывая, что, например, для меди в области красной границы фотоэффекта ($\lambda_{\text{к}} = 250$ нм) отношение $\frac{E^2}{2m_2c^2} \Big/ E \approx 4{,}2 \cdot 10^{-11}$, по порядку величины эквивалентное $\frac{E^2}{2m_2c^2} \Big/ \Delta = \frac{1}{\eta}$, можно сделать вывод, что заметное отличие распределения скоростей фотоэлектронов от сферического, т. е. фактически наруше-

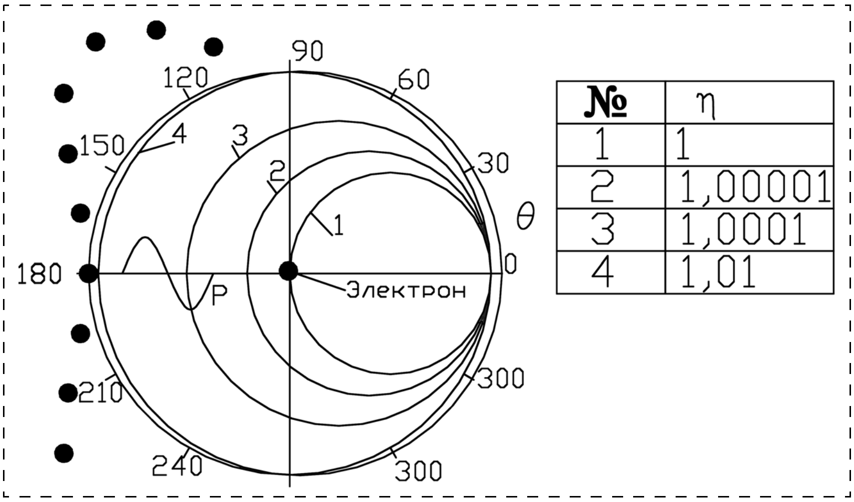


Рис. 5. Угловое распределение фотоэлектронов при внутреннем фотоэффекте в зависимости от параметра η при взаимодействии орбитальных электронов с квантом света. Черными кружочками показаны результаты экспериментов [9]

ние формулы $E = A_{\text{вых}} + E_1$, может наблюдаться только в очень коротковолновой части спектра γ-излучения.

На рис. 5 черными кружочками показаны результаты измерения углового распределения фотоэлектронов, выбитых квантами из монослоя атомов меди, нанесенного на поверхность никеля [9]. Длина волны квантов позволяла наблюдать фотоэффект с 2*p*-оболочки атомов меди, но фотоэффект на никеле при этом отсутствовал. Экспериментальное распределение фотоэлектронов противоречит расчетному распределению на рис. 2. Более того, в отличие от рис. 2, наблюдаются небольшие максимумы индикатрисы распределения, направленные противоположно направлению полета квантов света под углом примерно 45° к световому потоку. В [9] эти максимумы объясняются фокусирующими свойствами всей совокупности атомов поверхности. При увеличении числа нанесенных монослоев атомов меди на никель амплитуда максимумов возрастает.

Релятивистский случай

При рассмотрении релятивистского варианта внутреннего фотоэффекта закон сохранения энергии нужно записать в виде

$$E = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}} + E_2, \qquad (18)$$

где $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия фотоэлектрона.

Закон сохранения импульса остается в форме (9). Используя релятивистскую связь между энергией и импульсом для электрона

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4, \qquad (19)$$

где E_1 — полная энергия электрона; m_1 — в данном случае его масса покоя, выразим из (19) импульс электрона и подставим в уравнение (9). Для удобства дальнейших преобразований запишем (19) в виде

$$p_1^2 = \frac{E_1^2 - m_1^2 c^4}{c^2} = \frac{(E_1 + m_1 c^2)E_{\text{кин}}}{c^2}. \qquad (20)$$

При записи (20) использовано соотношение

$$E_{\text{кин}} = E_1 - m_1 c^2. \qquad (21)$$

Уравнение (9) преобразуется к виду

$$2m_2 c^2 E_2 = E^2 + (E_1 + m_1 c^2)E_{\text{кин}} - 2E\sqrt{(E_1 + m_1 c^2)E_{\text{кин}}}\cos\theta. \qquad (22)$$

В связи с большой массой ядра и относительно невысокой его скоростью после взаимодействия с фотоном выражение для связи импульса ядра с его кинетической энергией E_2 используется в нерелятивистской форме.

Подставив в (22) величину E_2 из (18), получим

$$2m_2 c^2(E - A_{\text{вых}} - E_{\text{кин}}) = E^2 + (E_1 + m_1 c^2)E_{\text{кин}} - 2E\sqrt{(E_1 + m_1 c^2)E_{\text{кин}}}\cos\theta. \qquad (23)$$

Обозначим:

$$\alpha = \frac{E\sqrt{E_1 + m_1 c^2}}{m_2 c^2};\; G = \sqrt{E_{\text{кин}}}. \qquad (24)$$

В результате (23) преобразуется к виду

$$\delta G^2 - \alpha G\cos\theta + \gamma = 0. \qquad (25)$$

Обозначение $\gamma = \frac{1}{2m_2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 + A_{\text{вых}} - E = \frac{1}{2m_2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \Delta = \frac{1}{2m_2}\left(\frac{E}{c}\right)^2(1 - \eta)$ соответствует предыдущему разделу.

Величина

$$\delta = 1 + \frac{m_2 c^2}{2}\left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 = 1 + \frac{m_1}{2m_2} + \frac{E_1}{2m_2 c^2} = 1 + \frac{m_1}{2m_2} + \frac{E_{\text{кин}} - m_1 c^2}{2m_2 c^2} = 1 + \frac{E_{\text{кин}}}{2m_2 c^2} \approx 1.$$

При этом учтено, что $E_{\text{кин}} \ll 2m_2 c^2$.

Решая уравнение (25), получаем:

$$G_{1,2} = \frac{\alpha}{2}\cos\theta \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\cos^2\theta - \gamma}. \qquad (26)$$

Подставляя обозначения, находим:

$$E_{\text{кин}} = \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \frac{2}{\alpha^2}\left(\frac{E^2}{m_2 c^2}\right)(\eta - 1)}\right)^2. \qquad (27)$$

В отличие от нерелятивистского случая (формула (17)) в формуле (27) в правой части имеется величина $\alpha = \frac{E\sqrt{E_1 + m_1c^2}}{m_2c^2}$, зависящая от полной энергии электрона E_1, в состав которой входит и кинетическая энергия $E_{кин}$. Но зависимость величины α от $E_{кин}$ несильная, так как в состав полной энергии входит относительно большая энергия покоя электрона m_1c^2.

Учитывая, что $E_1 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где $\beta = \frac{V_1}{c}$ — относительная скорость фотоэлектрона, находим:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \left(\frac{E}{m_2c}\right)^2 \frac{m_1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1\right). \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (27) и учитывая, что $E_{кин} = m_1c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, получаем:

$$2c\sqrt{(1-\mu)} = \frac{E}{m_2c}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \mu\frac{m_2}{m_1}(\eta - 1)}\right), \qquad (29)$$

где $\mu = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + 1}$.

Учитывая, что $2c\sqrt{(1-\mu)} = \sqrt{\frac{2E_{кин}}{m_1} \Big/ \left(1 + \frac{E_{кин}}{2m_1c^2}\right)} \approx V_1$, при $1 \gg \frac{E_{кин}}{2m_1c^2}$ находим:

$$V_1 \approx \frac{E}{m_2c}\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + \mu\frac{m_2}{m_1}(\eta - 1)}\right). \qquad (30)$$

Формула (30) позволяет учесть релятивистские эффекты при фотоэффекте в случае достаточно больших скоростей фотоэлектронов. При этом в отличие от (17) под корнем вводится релятивистский коэффициент μ. Как показывает расчет зависимости $\mu(\beta)$ (рис. 6), до скоростей фотоэлектронов, составляющих примерно половину скорости света в вакууме, релятивистскими эффектами при расчете распределения вылета фотоэлектронов можно пренебречь и пользоваться формулой (17).

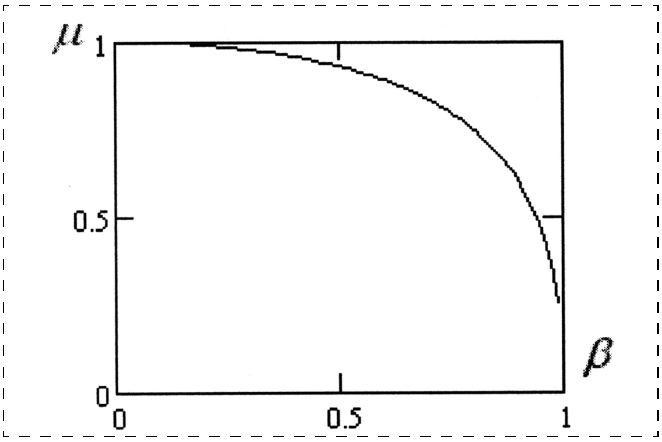


Рис. 6. Зависимость релятивистского коэффициента μ от относительной скорости фотоэлектронов $\beta = \frac{V}{c}$

Заключение

Получены зависимости энергии и скорости фотоэлектронов от угла вылета с учетом поправки на конечное значение массы ядра. В зависимости от того, какие свойства, волновые или корпускулярные, проявляет световой квант при взаимодействии с орбитальным электроном, угловое распределение энергии и скорости фотоэлектронов будет совершенно различным. Существование потока электронов с облучаемой поверхности при нормальном падении света [9] в направлении, противоположном падающему свету, указывает на преобладание корпускулярных свойств света при его взаимодействии с атомами. Таким образом, в данной работе получены геометрические, скоростные и энергетические соотношения, которые предназначены для ряда общих и специальных приложений нанотехнологий.

Список литературы

1. **Дитчберн Р.** Физическая оптика / Пер. с англ. М.: Наука, 1965. С. 413, 419, 497.
2. **Ашкрофт Н., Мермин Н.** Физика твердого тела. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1979. С. 82.
3. **Ноле Э. Л.** Туннельный механизм фотоэффекта в активированных цезием и кислородом металлических наночастицах // УФН. 2007. Т. 177. № 10. С. 1133—1137.
4. **Михайлов А. И., Михайлов И. А.** Двойной атомный фотоэффект в релятивистской области. Угловые и энергетические распределения фотоэлектронов // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. Вып. 5. С. 1537—1554.
5. **Левич В. Г.** Курс теоретической физики. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. С. 658.
6. **Давыдов А. С.** Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. С. 366.
7. **Блохин М. А.** Физика рентгеновских лучей. М.: Гос-издат, 1957. С. 261.
8. **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Квантовая электродинамика. Т. 4. М.: Наука, 1989. С. 249.
9. **Steigerwald D. A., Egelhoff W. F.** // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60. P. 2558.

УДК 621.3:519.3

П. П. Мальцев, д-р техн. наук, проф.,
А. А. Мельников, д-р физ.-мат. наук, проф.,
О. А. Мельников, аспирант,
Ю. А. Станкевич, студент,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)"

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ МИКРОДВИГАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ МИКРОСТРУКТУР

Представлены методика и результаты математического моделирования тепловых процессов в микродвигателях на основе многослойных волокнистых микроструктур.

Ключевые слова: *математическое моделирование, метод конечных элементов, тепловой режим, микродвигатель, стекловолоконная технология.*

Введение

Целенаправленные работы в области создания микродвигателей ведутся уже более 10 лет. Преимущественно это относится к электростатическим микродвигателям.

Создание же эффективных электромагнитных микродвигателей стало возможным в связи с развитием стекловолоконной технологии, когда базовые элементы конструкции формируются за счет сборки стекловолоконного пакета, его последующего утоньшения путем вытягивания и, наконец, избирательного травления стекла с образованием полостей, которые при формировании слоистых обмоточных структур микродвигателей заполняются металлом или выполняют функцию полости для микроротора.

Актуальность работы обусловлена объективной необходимостью разработки численной методики моделирования тепловых режимов микродвигателей на основе многослойных волокнистых микроструктур, которая обеспечила бы расчеты температурных полей в многослойных расчетных областях со сложной конфигурацией границ, при смешанных граничных условиях, произвольных законах распределения источников тепловыделений в областях такого рода, разнообразии теплофизических свойств используемых конструктивных материалов.

Постановка задачи

Расчет тепловых режимов микродвигателя вращательного движения на основе многослойных волокнистых микроструктур сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_{Vi} = 0, \quad i = 1, 2, 3, ..., n \qquad (1)$$

с граничным условием

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_0) = 0 \text{ на } S \qquad (2)$$

и условиями сопряжения на границе раздела слоев i и j

$$T|_{S_i} = T|_{S_j},\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{S_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{S_j}, \qquad (3)$$

где T — температура; λ_i — коэффициент теплопроводности; q_{Vi} — удельная мощность тепловых источников; α — коэффициент теплообмена с окружающей средой с температурой T_0; S — граница многослойной области V; n — внешняя нормаль к границе S.

Методика моделирования

В основу методики решения задачи (1)—(3) положен метод конечных элементов. Можно показать, что решение краевой задачи (1)—(3) эквивалентно минимизации функционала [1, 3]:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \left\{ \frac{1}{2}\lambda_i \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \right] - q_{V_i} T \right\} dV + \int_S \frac{1}{2}\alpha(T - T_0)^2 dS. \qquad (4)$$

В целях упрощения дальнейших преобразований введем матрицы

$$\{b\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$[c] = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

С учетом обозначений (5), (6) и после преобразований функционал (4) можно записать в виде

$$F = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \left\{ \frac{1}{2} \{b\}^T [c] \{b\} - Tq_{V_i} \right\} dV +$$

$$+ \int_S \frac{1}{2} \alpha (T - T_0)^2 dS. \qquad (7)$$

Предположим далее, что расчетная область V состоит из непересекающихся подобластей V_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$), и каждая подобласть V_i разбита на конечные элементы n_i ($i = 1, 2, 3, ..., n$) с системой базисных функций $N_m^{(e)}$. Введем в рассмотрение функции $T^{(e)}$, определенные на отдельных конечных элементах. Элементарный вклад конечного элемента $V^{(e)}$ в общую величину функционала (7) определяется равенством

$$F^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{b^{(e)T}\} [c^{(e)}] \{b^{(e)}\} dV - \int_{V^{(e)}} q^{(e)} T^{(e)} dV +$$

$$+ \int_{S^{(e)}} \frac{1}{2} \alpha^{(e)} (T^{(e)} - T_0)^2 dS. \qquad (8)$$

С учетом (8) выражение (7) можно переписать следующим образом:

$$F = \sum_{e=1}^{N} F^{(e)}, \qquad (9)$$

где $N = n_1 + n_2 + ... + n_n$ — общее число конечных элементов, на которые разбита область V.

Для того чтобы минимизировать функционал F, необходимо продифференцировать выражение (9) по $\{T\}$ и результат приравнять нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial \{T\}} = \sum_{e=1}^{N} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0, \qquad (10)$$

где $\{T\}$ — узловые значения искомой функции T.

Искомая функция T может быть определена для каждого конечного элемента через базисные функции $N^{(e)}$ следующим образом:

$$T^{(e)} = [N^{(e)}]\{T\}.$$

Таким образом,

$$\{b\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} ... \dfrac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} ... \dfrac{\partial N_n^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z} \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z} ... \dfrac{\partial N_n^{(e)}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_n \end{pmatrix} =$$

$$= [D^{(i)}]\{T\}. \qquad (11)$$

После дифференцирования выражения (11) по $\{T\}$ с учетом выражений (9) и (10) и приравнивания результата к нулю получим результирующую систему уравнений

$$[G]\{T\} = \{F\}, \qquad (12)$$

где

$$[G] = \sum_{e=1}^{N} [g^{(e)}]; \qquad (13)$$

$$[F] = -\sum_{e=1}^{N} [f^{(e)}]; \qquad (14)$$

$$[g^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} \{D^{(e)}\}^T [C^{(e)}] \{D^{(e)}\} dV +$$

$$+ \int_{S^{(e)}} l [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS; \qquad (15)$$

$$[f^{(e)}] = -\int_{V^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T dVS -$$

$$- \int_{S^{(e)}} \alpha^{(e)} T_0 [N^{(e)}]^T dS. \qquad (16)$$

Структура программного обеспечения численного моделирования тепловых режимов микродвигателей

Численное моделирование тепловых режимов микродвигателей включает три этапа:

- описание геометрии, описание физических характеристик, генерация сети конечных элементов;
- расчет с помощью МКЭ;
- визуализация и интерпретация результатов расчета.

Эти три этапа на уровне программного обеспечения выполняются отдельными модулями:

- модулем ввода данных (препроцессором);
- модулем вычислений (процессором счета);
- модулем вывода результатов (постпроцессором).

Препроцессор предназначен для ввода и подготовки информации, необходимой для моделирования тепловых режимов на ПЭВМ методом конечных элементов. Он осуществляет следующие функции:

- описание геометрии;
- генерация конечно-элементной сетки;
- указание областей и границ.

Операция указания областей и границ позволяет уточнить следующую информацию:

- описание физических характеристик материалов;
- описание источников;
- описание граничных условий.

Процессор счета получает на входе описание конечно-элементной сетки, физические характеристики и граничные условия. На выходе он выдает значения искомых величин в каждом узле сети. Модуль вычислений выполняет следующие функции:

- построение подматриц и подвекторов на каждом конечном элементе;
- объединение этих подматриц и подвекторов для формирования матрицы и правой части системы уравнений;
- учет граничных условий;
- решение системы уравнений.

Постпроцессор:

- извлекает значащую информацию;
- представляет численную информацию в графической форме для облегчения ее восприятия и интерпретации.

Комплекс программ FIELDMD состоит из отдельных пакетов программ, каждый из которых выполняет вполне определенные функции. Пакет программ MESH предназначен для генерации конечно-элементной сетки в расчетной области. Пакет FIELDMD предназначен для решения задач расчета тепловых режимов микродвигателей на основе многослойных волокнистых микроструктур. Пакет GRAPH предназначен для визуализации результатов расчета в виде картин распределения температурных полей.

Результаты моделирования

В данном случае решалась задача расчета стационарного теплового режима микродвигателя вращательного движения на основе многослойных волокнистых микроструктур, представленного на рис. 1 (см. третью сторону обложки).

Были рассчитаны температурные режимы микродвигателя вращательного движения на основе многослойных волокнистых микроструктур, изображенного на рис. 1, с учетом реальных геометрических размеров.

Результаты расчетов показаны на соответствующих рисунках.

На рис. 2 показана картина распределения температурного поля в сечении микродвигателя (см. третью сторону обложки).

На рис. 3 показан график зависимости максимальной температуры от удельной объемной мощности тепловыделений в многослойной структуре статора (см. третью сторону обложки).

На основании полученных результатов можно констатировать, что возможны локальные перегревы элементов многослойной структуры статора, это может приводить к форсированному изнашиванию изоляционных слоев и являться причиной быстрого износа элементов микродвигателей, изготовленных с использованием стекловолоконной технологии.

Заключение

Предложено математическое описание процессов теплообмена в микродвигателях на основе многослойных волокнистых микроструктур.

Разработаны методика, алгоритмы и программа численного моделирования процессов теплообмена в микродвигателях на основе многослойных волокнистых микроструктур, обеспечивающие высокую точность расчетов температурных полей в расчетных многослойных объемных областях со сложной конфигурацией границ, при произвольном расположении источников тепловыделений в областях такого рода, разнообразии теплофизических свойств используемых материалов.

Решена задача расчета тепловых режимов микродвигателей на основе многослойных волокнистых микроструктур. Показано, что возможны локальные перегревы элементов микроструктур, приводящие к форсированному износу изоляционных слоев и выходу из строя микродвигателей с такими структурами. Предельные тепловые режимы микродвигателей на основе многослойных волокнистых микроструктур определяются термопрочностными характеристиками применяемых материалов.

Список литературы

1. **Melnikov A. A.** Mathematical modeling of thermal modes of multilayer photodetector structures // Proc. SPIE. 2000. V. 4340. P. 325—330.

2. **Мельников А. А.** Математическое моделирование тепловых режимов многослойных фотоприемных структур // Прикладная физика. 2000. № 5. С. 14—20.

4. **Мельников А. А.** Расчет электромагнитных и температурных полей методом конечных элементов. М.: Изд. МИРЭА, 2001. 76 с.

5. **Мельников А. А.** Расчет температурных полей в многослойных фотоприемных структурах // Нано-и микросистемная техника. От исследований к разработкам. М.: Техносфера, 2005. С. 406—415.

УДК 621.382

И. И. Абрамов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
И. А. Гончаренко, науч. сотр., **Н. В. Коломейцева**, мл. науч. сотр.,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь
E-mail:nanodev@bsuir.edu.by

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНО-ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДОВ НА ОСНОВЕ GaAs/AlAs С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНИРОВАННОЙ ДВУХЗОННОЙ МОДЕЛИ

Анализ проблем согласования с экспериментальными данными результатов расчета ВАХ РТД по известным моделям привел к выводу о целесообразности разработки модели для определенной системы (систем) материалов. Показано, что предложенная комбинированная двухзонная модель может использоваться для удовлетворительного согласования с экспериментальными данными по ВАХ РТД на основе GaAs/AlAs.

Ключевые слова: *резонансно-туннельный диод, межзонное туннелирование, комбинированная двухзонная модель.*

Введение

В настоящее время резонансно-туннельные диод (РТД) и транзистор — перспективные приборы твердотельной наноэлектроники [1]. Достаточно отметить, что на их основе создаются интегральные схемы (ИС) различного назначения [2, 3], а некоторые из них находятся в серийном производстве [4]. Такие схемы фактически являются первыми серийными твердотельными наноэлектронными ИС на квантовых эффектах [5].

Проектирование и создание ИС на резонансно-туннельных структурах невозможны без достаточно адекватных физико-математических моделей. Разработка моделей этих структур обычно проводится в рамках квантово-механических формализмов [1, 6]: волновых функций, функций распределения Вигнера и функций Грина. Несмотря на значительные усилия по созданию адекватных моделей, в частности РТД, крайне редко с их помощью удается получить удовлетворительное согласование результатов расчета вольт-амперных характеристик (ВАХ) РТД с экспериментальными данными.

Цель работы — с одной стороны, анализ причин этого на примере рассмотрения наиболее адекватных моделей РТД, а с другой, — иллюстрация адекватности разработанной комбинированной двухзонной модели, по крайней мере, для РТД на основе системы материалов GaAs/AlAs.

Проблемы согласования с экспериментом

Несмотря на казалось бы относительно простой принцип функционирования РТД протекающие в реальном приборе физические процессы, как правило, существенно усложняются вследствие следующих факторов [6]: прибор является открытой системой, так как имеет место обмен энергией и частицами с окружением (принципиально важны его взаимодействия с источником питания и др., включая влияние температуры окружающей среды), электроны в приборе могут рассеиваться на фононах, неровностях поверхностей раздела, примесях, дефектах, электронах и др.; значительное влияние могут оказывать различного рода флуктуации (толщины слоев, распределения примеси, состава и др.); важна реальная зонная структура исследуемой системы; значительное влияние могут оказывать заряды на поверхностях раздела и др. Эти факторы существенно усложняют задачу, приводят к дополнительным механизмам транспорта (к резонансному и последовательному туннелированию) и делают эту задачу фактически неразрешимой в строгом виде даже для РТД [6]. К сожалению, практически невозможна и строгая постановка задачи моделирования конкретного РТД [6].

Рассмотрим имеющиеся данные по согласованию результатов расчетов с экспериментом, достигнутые с применением наиболее адекватных моделей различных формализмов.

Неплохие результаты были получены с использованием системы моделирования NEMO, в которой реализованы модели формализма функций Грина [7, 8]. В них для согласования с экспериментом применяется большое число подгоночных параметров, причем приходится изменять относительно исходных такие важные данные, как ширина барьеров и ям, уровни легирования [9]. Основная причина этого, по-видимому, заключается в большом количестве приближений, используемых при построении моделей формализма функций Грина [6].

Удовлетворительное согласование с экспериментом было получено также с применением модели, в которой кинетическое уравнение для функции Вигнера решается в квантовых областях, а метод Монте-Карло используется в классических областях [10]. Однако и в этом случае проводилась корректировка исходных данных, в частности, увеличивалась высота барьеров. Здесь же главная причина, по-видимому, состоит в относительно простом виде применяемого кинетического уравнения для функции Вигнера [6].

В целом для отмеченных моделей характерны следующие основные недостатки [6]: громоздкость; большие затраты вычислительных ресурсов ЭВМ. В результате требуется использование высокопроизводительных вычислительных систем.

Согласование рассчитанных ВАХ РТД с экспериментальными данными получено и с помощью нескольких моделей формализма волновых функций [11—13]. В некоторых случаях удовлетворительное согласование с экспериментом достигается при учете эффектов рассеяния [11]. Подгоночным параметром в этом случае является скорость рассеяния. В других случаях дополнительно необходимо учитывать [13] форму разрыва зон, плотность поверхностного заряда на гетерограницах, сопротивления приконтактных областей. Хорошее согласование с экспериментом получено с помощью модели, приведенной в работе [14]. В ней кроме наличия пассивных областей может учитываться и влияние подложки. Автором, к сожалению, не указываются подгоночные параметры модели.

Главное преимущество моделей формализма волновых функций — это, как правило, их более высокая эффективность относительно моделей других формализмов [6].

Таким образом, разработанные ранее даже наиболее адекватные модели не позволяют получить удовлетворительное согласование с экспериментом при расчете ВАХ РТД в широком диапазоне исходных параметров, смещений и других воздействий, для различных систем материалов, т. е. модели не характеризуются высокой степенью универсальности. Это серьезный недостаток известных моделей РТД [6]. В чем же его причины. Основными из них, с нашей точки зрения, являются следующие. Во-первых, имеются объективные сложности идентификации исходных данных моделей. Во-вторых, используемые приближения: в численных моделях всех трех формализмов традиционно применяются, по крайней мере, одночастичное приближение и метод эффективной массы. В-третьих, в моделях не учитываются в полной мере важные факторы из отмеченных ранее.

В целом в работе [6] сформулированы основные направления повышения адекватности моделей РТД общих формализмов квантово-механического подхода [1]. Однако, к сожалению, эти направления пока труднореализуемы в комплексе на практике. Кроме того, их реализация будет, как правило, приводить к падению экономичности моделей, иногда существенному. В сложившейся ситуации мы пошли по другому пути, а именно: созданию модели, которая была бы достаточно адекватна и в то же время экономична лишь для определенной системы (систем) материалов. В данной работе в дальнейшем показано, что разработанная комбинированная двухзонная модель может быть успешно применена при расчете ВАХ РТД на основе GaAs/AlAs — широко распространенной в рассматриваемом случае системе материалов, т. е. для достижения указанной цели.

Комбинированная модель

Комбинированная двухзонная модель использовалась для моделирования гетероструктуры с одним туннельным переходом, с протяженными приконтактными областями и РТД. Эта модель детально описана в статьях [15, 16], поэтому здесь ограничимся основными положениями для РТД.

Модель основана на полуклассическом и квантово-механическом (формализм волновых функций) подходах и относится к классу комбинированных моделей. Она позволяет рассчитывать волновые функции, самосогласованный заряд и потенциал, коэффициент прохождения, ВАХ в зависимости от конструктивно-технологических и электрофизических параметров приборной структуры. Ее главная особенность — возможность учета взаимодействия различных классических и квантово-механических областей исследуемого прибора, а также учет Г-Х-междолинного рассеяния.

В модели структура представляется в виде трех областей: контакты, приконтактные области и активная область. К активной области относятся барьеры и расположенная между ними квантовая яма.

Предложенная численная модель реализуется в два этапа. На первом этапе самосогласованно решаются уравнения Шредингера в активной области прибора для основной зоны и уравнение Пуассона в более протяженной области прибора между контактами. В целях учета влияния Г-Х-междолинного рассеяния в модели на втором этапе в активной области решаются два связанных уравнения Шредингера. Конечно-разностная аппроксимация уравнений Шредингера и Пуассона с учетом поверхностного заряда на границе раздела двух сред осуществляется в рамках интегроинтерполяционного подхода Тихонова—Самарского.

Системы линейных алгебраических уравнений, получаемые после конечно-разностной аппроксимации, решаются с использованием прямых численных методов.

Плотность тока вычисляется с помощью формулы Тсу—Есаки на основе коэффициента прохождения, при этом учитывается влияние поперечного волнового вектора.

Разработанная комбинированная двухзонная модель характеризуется повышенной эффективностью вследствие того, что решение двух связанных уравнений Шредингера осуществляется только один раз на втором этапе, что уменьшает время расчета на ЭВМ.

Программа, реализующая предложенную модель, была включена в систему моделирования наноэлектронных приборов NANODEV [17, 18]. Принципиально важно отметить, что программа, так же как и вся система NANODEV, предназначена для использования на персональных ЭВМ в отличие от отмеченных ранее моделей, в частности реализованных в системе NEMO. В результате система NANODEV может применяться не только для научных исследований, но и в инженерных приложениях, в учебном процессе, что представляется особенно важным.

Результаты моделирования

Покажем, что с помощью разработанной комбинированной двухзонной модели достигается удовлетворительное согласование с экспериментом при расчете ВАХ ряда РТД на основе GaAs/AlAs. В качестве согласующих параметров в двухзонной модели нами были выбраны: площадь поперечного сечения прибора s, константа взаимодействия между зонами α, сопротивления приконтактных областей $R_э$ и $R_к$; поперечный волновой вектор k_{II}. Заметим, что в работах [15, 16] k_{II} полагался равным нулю.

На рис. 1 приведено сравнение результатов моделирования с применением комбинированной двухзонной модели с экспериментальными данными* для РТД1 [9]. В качестве согласующих параметров были использованы площадь поперечного сечения РТД ($s = 64$ мкм^2) и константа взаимодействия между зонами α. Наилучшее согласование получено при $\alpha = 0{,}6$.

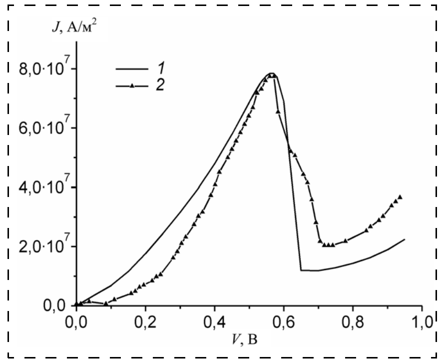


Рис. 1. Сравнение ВАХ РТД1, рассчитанной с использованием двухзонной модели (кривая *1*), с экспериментальными данными (кривая *2*) работы [9]

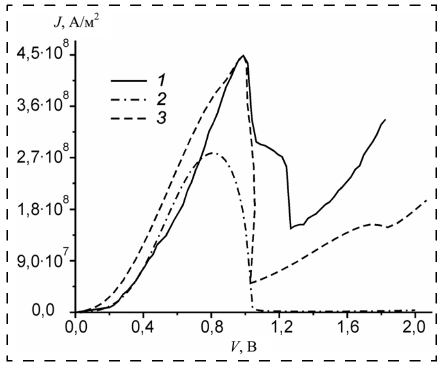


Рис. 2. Сравнение ВАХ РТД2, рассчитанной с использованием однозонной (кривая *2*) и двухзонной (кривая *3*) моделей, с экспериментальными данными (кривая *1*) работы [19]

При моделировании РТД2 [19] (рис. 2) варьировались параметры s, α и $R = R_э = R_к$, k_{II}. Наилучший результат расчета получен при $\alpha = 0{,}045$ эВ·нм, $R = 6$ Ом, $k_{II} = 2 \cdot 10^8$ м$^{-1}$ (кривая *3*). Исследования проводились при комнатной температуре. Заметим, что экспериментальное значение площади поперечного сечения РТД2 $s = 49$ мкм^2. Для результатов, приведенных на рис. 2, значения s отличаются от этого значения на 24,5 % в меньшую сторону. Это можно объяснить, с одной стороны, естественной экспериментальной погрешностью для поперечного сечения активной области РТД, а с другой стороны, неучетом при моделировании других факторов. Видно, что с помощью разработанной двухзонной комбинированной модели могут быть получены удовлетворительные результаты согласования с экспериментом в области долины в отличие от однозонной модели (кривая *2*). Из рис. 2 следует, что для рассматриваемой системы материалов важно учитывать влияние взаимодействия между Г- и Х-долинами.

Были проведены исследования РТД3 [20] при температуре 77 К. На рис. 3 показано сравнение ВАХ РТД3, рассчитанной с использованием двухзонной модели (кривая *1*), с экспериментальными данными (кривая *2*) работы [20]. Наилучший результат получен при следующих значениях параметров: $\alpha = 0{,}0384$ эВ·нм, $k_{II} = 2 \cdot 10^8$ м$^{-1}$.

Проведенные исследования показали, что согласование результатов расчетов, полученных с исполь-

---

*Все данные для удобства сравнения приведены для плотностей токов.

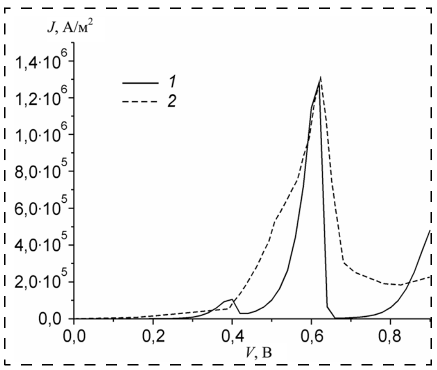


Рис. 3. Сравнение ВАХ РТД3, рассчитанной с использованием двухзонной (кривая *1*) модели, с экспериментальными данными (кривая *2*) работы [20]

зованием двухзонной комбинированной модели, с экспериментальными данными лучше при комнатной температуре, нежели при температуре 77 К, особенно в области токов долины на ВАХ РТД (сравните рис. 1, 2 и рис. 3). Это, по-видимому, связано с неучетом влияния на исходные данные температуры окружающей среды, например эффекта деионизации примеси.

При всех вычислениях использовались значения электрофизических параметров системы материалов GaAs/AlAs из работы [21].

Согласование с экспериментом для двух других РТД на основе GaAs/AlAs приведено в нашей работе [16]. Заметим, что согласование для одного РТД достигнуто при вариации только параметра α ($\alpha = 0{,}047$ эВ · нм), а для другого РТД — при изменении трех параметров — s, α и R ($\alpha = 0{,}05$ эВ · нм).

Отметим, что константа взаимодействия между зонами α лежит в достаточно узком диапазоне значений 0,045...0,06 эВ · нм при $T = 300$ К для четырех исследованных РТД и уменьшается с падением температуры для пятого РТД, что физически обосновано. Это свидетельствует о том, что этот параметр в основном определяется системой материалов и температурой. К сожалению, в литературе мы не нашли данных о том, как определять параметр α, поэтому наша модель может использоваться для косвенного измерения этого важного параметра двухзонных моделей.

Заключение

Анализ проблем согласования с экспериментальными данными результатов расчета ВАХ РТД по известным моделям привел к выводу о целесообразности разработки модели, которая была бы адекватна и в то же время экономична лишь для определенной системы (систем) материалов. Показано, что предложенная комбинированная двухзонная модель может использоваться для удовлетворительного согласования с экспериментальными данными по ВАХ РТД на основе GaAs/AlAs, причем число согласующих параметров варьируется от 1 до 4, т. е. невелико. Это проиллюстрировано на примере расчета ВАХ пяти различных РТД. Заметим, что в литературе мы не встречали данных по сравнению с экспериментом столь относительно большого числа РТД для одной модели. Показано, что модель может также применяться для косвенного измерения одного из ключевых параметров двухзонных моделей — константы взаимодействия между зонами α.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность профессору В. Г. Литовченко за полезную дискуссию по поводу параметра α.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной комплексной программы научных исследований "Наноматериалы и нанотехнологии" Республики Беларусь.

Список литературы

1. **Абрамов И. И.** Проблемы и принципы физики и моделирования приборных структур микро- и наноэлектроники. IV. Квантовомеханические формализмы // Нано- и микросистемная техника. 2007. № 2. С. 24—32.
2. **Sen S., Capasso F., Cho A. Y., Sivco D.** Resonant tunneling device with multiple negative differential resistance: Digital and signal processing applications with reduced circuit complexity // IEEE Trans. Electron. Devices. 1987. Vol. ED-34. N 10. P. 2185—2191.
3. **Mazumder P., Kulkarni S., Bhattacharya M., Sun J.-P., Haddad G. I.** Digital circuit applications of resonant tunneling devices // Proc. IEEE. 1998. Vol. 86. N 4. P. 664—686.
4. **Technology** Roadmap for Nanoelectronics / European Commission, IST programme, Future and Emerging Technologies / Ed. R. Compano. 2000. 104 p.
5. **Абрамов И. И.** Термин "элемент" в микро- и наноэлектронике // Нано- и микросистемная техника. 2008. № 6. С. 2—4.
6. **Абрамов И. И.** Проблемы и принципы физики и моделирования приборных структур микро- и наноэлектроники. V. Резонансно-туннельные структуры // Нано- и микросистемная техника. 2007. № 3. С. 57—70.
7. **Klimeck G., Lake R., Bowen R. C., Frensley W. R., Moisea T. S.** Quantum device simulation with a generalized tunneling formula // Appl. Phys. Lett. 1995. Vol. 67. N 17. P. 2539—2541.
8. **Lake R., Klimeck G., Bowen R. C., Jovanovic D.** Single and multiband modeling of quantum electron transport through layered semiconductor devices // J. Appl. Phys. 1997. Vol. 81. N 12. P. 7845—7869.
9. **Boykin T. B., Bowen R. C., Klimeck G., Lear K. L.** Resonant-tunneling diodes with emitter prewells // Appl. Phys. Lett. 1999. Vol. 75. N 9. P. 1302—1304.
10. **Garsia-Garsia J., Martin F.** Simulation of multilayered resonant tunneling diodes using coupled Wigner and Boltzmann distribution function approaches // Appl. Phys. Lett. 2000. Vol. 77. N 21. P. 3412—3414.
11. **Sun J. P., Haddad G. I.** Self-consistent scattering calculation of resonant tunneling diode characteristics // VLSI Design. 1997. Vol. 3. P. 1—4.
12. **Абрамов И. И., Гончаренко И. А.** Численная комбинированная модель резонансно-туннельного диода // Электромагнитные волны и электронные системы. 2002. Т. 7. № 3. С. 54—60.
13. **Абрамов И. И., Гончаренко И. А., Коломейцева Н. В.** Комбинированная модель резонансно-туннельного диода // Физика и техника полупроводников. 2005. Т. 39. Вып. 5. С. 1138—1145.
14. **Обухов И. А.** Моделирование переноса заряда в мезоскопических структурах. Севастополь: Вебер. 2005. 226 с.
15. **Абрамов И. И., Гончаренко И. А., Коломейцева Н. В.** Комбинированная двухзонная модель гетероструктуры с одним туннельным переходом и протяженными приконтактными областями // Микросистемная техника. 2004. № 9. С. 36—40.
16. **Абрамов И. И., Гончаренко И. А., Коломейцева Н. В.** Комбинированная двухзонная модель резонансно-туннельного диода // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41. Вып. 11. С. 1395—1400.
17. **Абрамов И. И., Гончаренко И. А., Игнатенко С. А., Королев А. В., Новик Е. Г., Рогачев А. И.** Система моделирования наноэлектронных приборов — NANODEV // Микроэлектроника. 2003. Т. 32. Вып. 2. С. 124—133.
18. **Abramov I. I., Abramov K. I., Goncharenko I. A., Ignatenko S. A., Kazantsev A. P., Kolomejtseva N. V., Lavrinovich A. M., Pavlenok S. N., Strogova A. S.** Simulation pd physical processes in nanoelectronic devices with the use NANODEV system // Proc. of SPIE. 2006. Vol. 6260. P. 62601Q-1—62601Q-8.
19. **Wei T., Stapleton S., Berolo O.** Capacitance and hysteresis study of AlAs/GaAs resonant tunneling diode with asymmetric spaser layers // J. Appl. Phys. 1995. Vol. 77. N 8. P. 4071—4076.
20. **Belyaev A. A., Brlyaev A. E., Konakova R. V., Vitusevich S. A., Milenin V. V., Soloviev E. A., Kravchenko L. N., Figielski T., Wosinski T., Makosa A.** Radiation hardness of AlAs/GaAs-based resonant tunneling diodes // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. 1999. Vol. 2. N 1. P. 98—101.
21. **Sun J. P.** Modeling of semiconductor quantum device and its applications // Ph. D. Thesises. Dep. of EECS. Univ. of Michigan. Ann Arbor. 1993. 148 p.

УДК 621.383

А. А. Резнев*, д-р техн. наук, проф., командир,
А. А. Пустовалов**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ген. директор,
Е. М. Максимов*, д-р техн. наук, сотр.,
А. Н. Передерий*, сотр.,
Н. С. Петренко*, сотр.,
*Войсковая часть 35533 ФСБ России,
**НПП "БИАПОС", г. Москва

ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ МИНИАТЮРНОГО ИСТОЧНИКА ТОКА НА БЕТА-ВОЛЬТАИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ В КАЧЕСТВЕ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА ИЗОТОПА НИКЕЛЯ-63

Показана возможность создания миниатюрного источника тока на бета-вольтаическом эффекте с использованием изотопа никеля-63. При напряжении 3 В удельная электрическая мощность источника тока на основе кремниевого преобразователя составит не менее 0,05 мВт/см^3. Срок службы такого источника составит более 30 лет. Впервые предложена технология промышленного производства изотопа никеля-63 с использованием только российских ресурсов и технологического оборудования.

Ключевые слова: *миниатюрный источник тока, бета-вольтаический эффект, изотоп никеля-63, кремниевый преобразователь.*

Современный период научно-технического и технологического прогресса характеризуется бурным развитием нанотехнологий и активным практическим внедрением микросистемной техники. Это обусловливает актуальность создания миниатюрных энергоемких автономных источников нового поколения микроваттного диапазона мощностей, отвечающих современным требованиям по таким показателям, как удельная энергоемкость, срок службы, время непрерывной работы, надежность в течение всего срока службы в широком диапазоне температур.

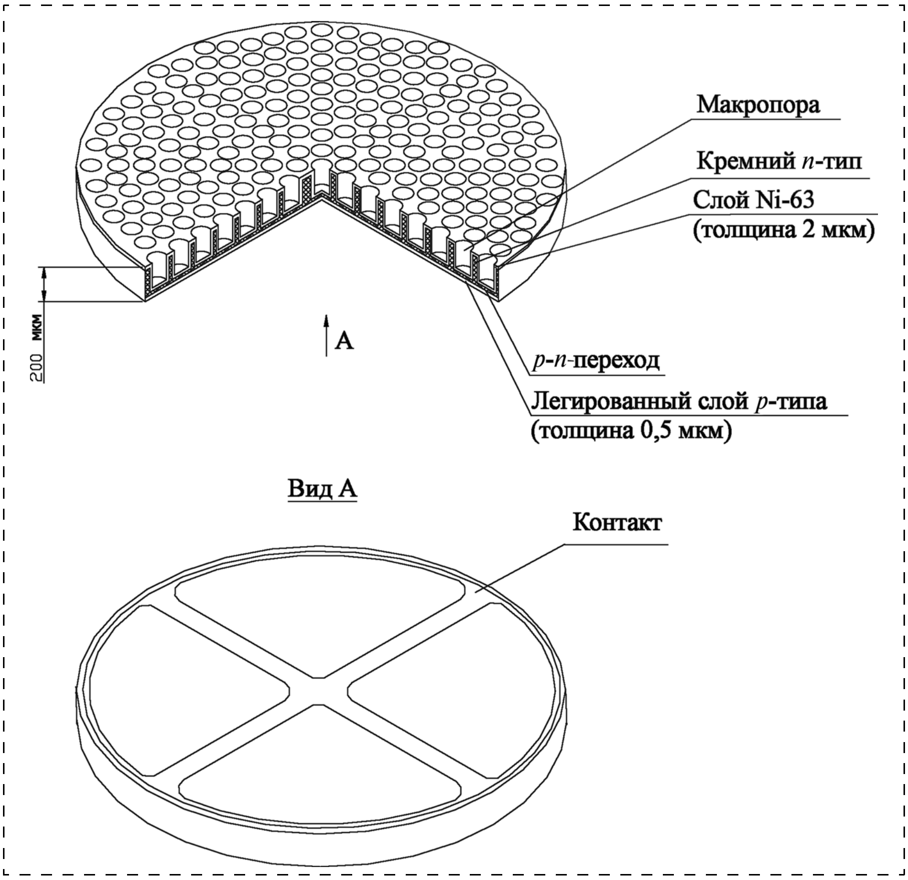
Потребность в таких источниках тока уже в настоящее время достаточно велика и будет возрастать по мере развития микроэлектроники на базе нанотехнологий. Так, в настоящее время актуальной является задача создания миниатюрного источника тока, который мог бы обеспечить работу микроэлектронной аппаратуры в течение десятилетий. Они необходимы там, где замена отработавшей традиционной "батарейки" — химического источника тока — будет затруднена или просто невозможна. Например, такие источники энергии могли бы использоваться для электропитания электроники на космических аппаратах или датчиков для мониторинга состояния гигантских строительных конструкций типа мостов, небоскребов и т. д., в медицине для питания кардиостимуляторов, искусственных внутренних органов и т. д., а также для решения специальных задач [1].

Наиболее полно поставленным требованиям отвечают атомные батареи, работающие на бета-вольтаическом эффекте. Бета-вольтаический эффект является аналогом фотоэлектрического эффекта, с той лишь разницей, что образование электрон-дырочных пар в кристаллической решетке полупроводника происходит под воздействием бета-частиц, а не светового излучения. Такой бета-электрический преобразователь, как и фотопреобразователь, представляет собой полупроводниковый элемент с *p—n*-переходом, контактирующий с радиоактивным источником бета-излучения. Энергия, необходимая для образования электрон-дырочных пар, получается за счет кулоновского взаимодействия бета-частиц с электронами кристаллической решетки, а число образовавшихся неравновесных носителей пропорционально энергии потока падающих частиц [1, 4].

Первые попытки, в том числе и за рубежом, создания атомных источников тока относятся к середине 50-х годов прошлого столетия [2]. Сначала в качестве радионуклида использовался стронций-90, потом его заменили на прометий-147 и тритий [3, 4].

В настоящее время за рубежом, и прежде всего в США, ведутся интенсивные разработки атомных батарей, работающих на данном принципе, с использованием трития. Американская компания *Beta Batt Inc.* завершила разработку нового типа атомной батареи, в которой энергия распада радиоактивных изотопов напрямую преобразуется в электрическую энергию. Источником энергии является бета-излучение трития. Мощность такой батареи намного ниже, чем у сопоставимых по размерам химических источников тока, однако срок службы составляет до 20 лет. Используя полученный опыт, компания *Beta Batt Inc.* работает над созданием батареи второго поколения, получившей название DEC CELL (*Direct Energy Conversion CELL*). По прогнозам специалистов первое и второе поколения атомных батарей с содержанием трития будут вырабатывать от 50 до 125 мкВт на 1 см^3 активной зоны элементов батарей. Однако активная зона такого источника тока должна находиться в герметичной оболочке, позволяющей удерживать газообразный тритий. Кроме того, период полураспада трития составляет 12,35 года, поэтому трудно рассчитывать на создание сравнительно миниатюрных источников тока со стабильными электрическими параметрами в течение нескольких десятков лет.

В России в результате комплексных исследований, проведенных ЗАО НПП "БИАПОС" с привлечением специалистов Института молекулярной физики РНЦ "Курчатовский институт", НИИ ядерной физики МГУ и других специализированных предприятий и организаций, изучены принципиальные вопросы и предложены тех-



нические решения создания атомной батареи бета-вольтаического типа с использованием никеля-63 и кремниевых преобразователей. Период полураспада никеля-63 составляет около 100 лет, что обеспечивает стабильность работы такого источника тока в течение длительного периода времени. Кроме того, этот радионуклид чистый бета-излучатель с максимальной энергией бета-частиц 65 кэВ, что значительно меньше порога радиационных повреждений кремния. Это позволяет рассчитывать, что срок службы такого источника тока будет составлять 30 лет и более.

Средняя энергия β-спектра никеля-63 настолько мала ($E_{ср} = 17$ кэВ), что ни тормозное, ни бета-излучение не выходят за пределы корпуса источника тока. Это создает возможность применения таких источников тока как для широкого круга имплантируемых в организм человека биостимуляторов, так и во многих других технических сферах (микроэлектроника, космос, телекоммуникации, мониторинг окружающей среды и т. п.).

В ходе экспериментальных работ были изготовлены макеты бета-электрических батарей с использованием преобразователей из кремния *n*-типа с обратным током насыщения $I_{обр} \approx 5 \times 10^{-10}$ А/см^2, с толщиной подложки 300 мкм и размером 20 × 20 мм, которые обеспечивают электрическую мощность 0,21 мкВт при использовании никеля-63 с 18 % содержанием, который в настоящее время нарабатывается в России в небольших количествах. В расчете на 1 см^3 это составит около 2 мкВт.

Для повышения эффективности преобразования в дальнейшем предполагается использовать преобразователи на основе макропористого кремния — нового материала в микроэлектронике. Это позволит развить рабочую поверхность преобразователя ~ в 17 раз и, соответственно, повысить эффективность источника тока в целом. Наиболее предпочтительным предлагается вариант бета-электрического преобразователя для источника тока, представленный на рисунке.

Разрабатываемый бета-электрический кремниевый преобразователь имеет форму тонкого диска диаметром 20 мм и толщиной ~200 мкм, на лицевой стороне преобразователя сформирован *p*—*n*-переход глубиной залегания 0,5...0,8 мкм, тыльная сторона преобразователя имеет канальную структуру с диаметром каналов 10 мкм, глубиной каналов ~150 мкм и расстоянием между каналами ~10 мкм, эффективная поверхность макропор ~50 см^2. Выходная электрическая мощность, получаемая с одного такого бета-электрического преобразователя, составит ~3 мкВт (при использовании радионуклида никеля-63 с изотопной чистотой ~80 %).

Использование никеля-63 80—90 %-ной концентрации позволит повысить значение электрической мощности единичного преобразователя в 7 раз по сравнению с использованием бета-излучателя на основе никеля-63 18 %-ной концентрации.

Таким образом, на основе расчетных и экспериментальных исследований обоснована возможность создания источника тока (атомной батареи бета-вольтаического типа) с использованием радионуклида никель-63 и кремниевых преобразователей на основе макропористого кремния с удельными характеристиками, близкими к характеристикам лучших литиевых элементов. Источник тока будет представлять собой атомную батарею бета-вольтаического типа с выходным напряжением 3 В, удельной электрической мощностью не менее 0,05 мВт/см^3 и сроком службы не менее 30 лет.

Проведенные исследования по созданию источника тока на никеле-63 позволили определить круг проблем, которые предстоит решить:

- разработка высокоэффективного бета-электрического преобразователя на основе макропористого кремния, методов контроля качества изготовления преобразователей в стадиях производства и организация их серийного выпуска;
- разработка новой технологии получения и организация промышленной наработки никеля-63 с изотопной чистотой 80...90 %;
- разработка технологии нанесения радионуклида никеля-63 в макропоры преобразователей, разработка специальной установки для

нанесения радиоактивного никеля-63 и организация производственного участка по нанесению радиоактивного никеля на соответствующем производстве;

- разработка конструкции источника тока, проведение испытаний на радиационную безопасность, организация серийного производства;
- в организационном плане необходимо определить предприятия, способные решить поставленные задачи, оценить их технические возможности и согласовать их участие в будущих работах.

Все эти задачи в настоящее время находятся в стадии решения с привлечением отечественных предприятий, имеющих необходимые технологические и производственные возможности.

Главной проблемой, самой дорогостоящей и сложной в организационном и производственном плане, является задача разработки и освоения новой технологии промышленной наработки радионуклида никеля-63 с изотопной чистотой 80...90 %.

Существующий в настоящее время единственный способ получения никеля-63 заключается в облучении высокообогащенной по никелю-62 мишени (95...97 %) в реакторе с супервысоким нейтронным потоком (10^{15} нейтронов/(см$^2 \cdot$ с)). При этом способе существуют принципиальные ограничения, не позволяющие при любых условиях обеспечить в облученной мишени концентрацию никеля-63 более 27 % от исходной концентрации никеля-62, а практически эта величина составляет значение не более 15 % [5].

Для преодоления такой ситуации ЗАО НПП "БИАПОС" была предложена и технически обоснована новая концепция промышленного производства никеля-63 с обогащением 80...90 % в конечном продукте, что, по нашему мнению, может быть приемлемым как для потребителя, так и для производителя [6].

Для промышленного производства никеля-63 с обогащением конечного продукта на уровне 80...90 % предлагается заменить облучение малых количеств высокообогащенного никеля-62 (95...97 %) в реакторе с супервысоким нейтронным потоком (10^{15} нейтронов/см$^2 \cdot$ с) на облучение большого количества относительно дешевого среднеобогащенного по никелю-62 сырья (70...80 %) в ядерных реакторах с нейтронными потоками $5 \cdot 10^{13}...10^{14}$ нейтронов/см$^2 \cdot$ с), т. е. облучение проводить не в реакторе с супервысоким нейтронным потоком ($10^{15}...10^{16}$ нейтронов/см$^2 \cdot$ с), а в ядерных реакторах атомных электростанций или промышленных реакторах с нейтронным потоком ~10^{14} нейтронов/см$^2 \cdot$ с без нарушения регламента их работы. После 2—3-летнего цикла облучения мишени проходят радиохимическую очистку от гамма-излучающих изотопов и поступают на центрифужное разделение для получения никеля-63 нужной концентрации. При этом весьма важен опыт, накопленный в России при обогащении других радионуклидов: железа-55, олова-119^m, криптона-85. Оставшийся после отбора никеля-63 продукт, практически с исходной степенью концентрации по никелю-62 и несколько обогащенный по никелю-63, возвращается на повторное облучение.

Основные технологические этапы этого процесса можно представить следующим образом:

- получение исходной обогащенной по никелю-62 мишени до нужной концентрации;
- облучение мишени в ядерном реакторе;
- радиохимическая очистка;
- дообогащение никеля-63 на центрифужных каскадах.

Проведенные расчетные оценки показали реальность достижения поставленной задачи с использованием технического потенциала существующих производств в России.

Однако очевидно, что завершение работ по этой проблеме в рамках НИОКР и серийное освоение атомных источников тока для удовлетворения нужд как отечественных, так и зарубежных потребителей возможно осуществить только при государственной поддержке.

Организация серийного производства атомных источников тока позволит России осуществить технологический прорыв, обеспечив мировой приоритет в области оснащения высокотехнологичными источниками электроэнергии мировое производство изделий микросистемной техники и устройств, разрабатываемых с помощью нанотехнологий и наноматериалов.

При этом следует также отметить, что никель-63 — это новый материал с потенциально широкой областью применения, который может стать перспективным коммерческим продуктом, не имеющим аналогов и производящимся только в России, с использованием только российских ресурсов и технологии. Это свидетельствует о высоком инновационном потенциале проекта по разработке и освоению серийного производства атомных источников тока для нужд отечественной и мировой микро- и наноэлектроники.

Список литературы

1. **Лазаренко Ю. В., Пустовалов А. А., Шаповалов В. П.** Малогабаритные ядерные источники электрической энергии. М.: Энергоатомиздат, 1992.
2. **Rappaport P. I., Loferski J. J., Lindery E. G.** A study program of possible uses new principle // Nucleonics. 1957. Vol. 15. P. 99.
3. **Гусев В. В., Кодюков В. М., Почтаков А. А., Пустовалов А. А.** Особенности преобразования энергии радиоактивного распада в электрическую с использованием кремниевых полупроводников с *p—n*-переходом // Радиационная техника. М.: Атомиздат, 1975. Вып. 11. С. 61—67.
4. **Olsen L. C.** // Proc. XII Space Photovoltaic Research and Technology Conference, Cleveland, USA. 1992. P. 256.
5. **Герасимов А. С., Зарицкая Т. С., Рудин А. П.** Справочник по образованию нуклидов в ядерных реакторах ЭАИ. М., 1989.
6. **Высокоэффективный** источник тока: Отчет / М.: ЗАО НПП "БИАПОС", 2004.

УДК 621.3.049.76

В. М. Любимский, д-р техн. наук, проф.,
Новосибирский государственный технический университет

ИЗГИБ ДЛИННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ И РАВНОМЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

Получена система дифференциальных уравнений изгиба длинной прямоугольной многослойной пластинки при изменении температуры и равномерном давлении, позволяющая определять прогибы, деформации, механические напряжения пластинки. Получены точные решения системы дифференциальных уравнений для жестко защемленной и свободно опертой пластинок. Сравнение расчетных результатов с результатами, имеющимися в литературе, показало их хорошее согласие.

Ключевые слова: *длинная составная прямоугольная пластина, температурные отклонения, деформация, напряжение.*

Введение

При проектировании изделий микросистемной техники (МСТ) необходимо знать характеристики материалов, из которых изготовляются эти изделия. Однако условия роста, легирование, температурные обработки могут влиять на характеристики материалов, причем предсказать это влияние невозможно. Поэтому проводятся экспериментальные исследования механических свойств в зависимости от условий роста, уровня легирования и т. д. [1—3].

Кроме того, изделия МСТ, как правило, состоят из нескольких слоев различных материалов с отличающимися коэффициентами линейного расширения и упругими свойствами, что приводит к возникновению температурных деформаций [4, 5].

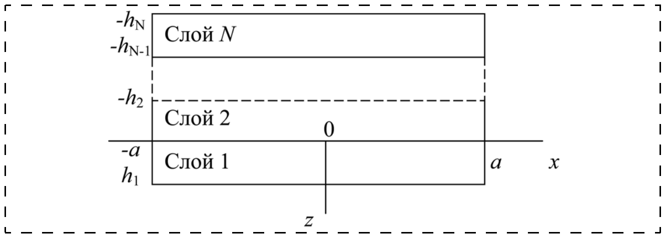
Изгиб длинной прямоугольной пластинки, состоящей из двух слоев, при изменении температуры и отсутствии давления рассмотрен в работе [6], а изгиб длинной многослойной пластинки при отсутствии давления — в работе [7].

Цель данной работы — расчет прогибов длинной прямоугольной многослойной пластинки при изменении температуры и равномерном давлении.

Теория

При изменении температуры и действии давления на многослойную пластинку (см. рисунок) происходит ее изгиб. Энергия упругой деформации пластинки состоит из энергии смещений в слоях пластинки $V^{(u)}$ и энергии изгиба $V^{(w)}$. Сумма энергий $V^{(u)}$ и $V^{(w)}$, за вычетом работы внешних сил $V^{(q)}$, должна быть минимальной.

Рассмотрим случай, когда смещение (U) произвольной точки пластинки за счет деформации и температуры не зависит от z [8, 9].



Положение осей координат на пластинке

Смещения произвольных точек в слое n за счет деформации

$$u_n = U - \alpha_n \Delta T x,$$

где α_n — температурный коэффициент линейного расширения слоя n; ΔT — изменение температуры.

Упругая деформация слоя n за счет смещений и изгиба [10, стр. 427]

$$\varepsilon_{xn} = \frac{dU}{dz} - \alpha_n \Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \tag{1}$$

где w – прогиб пластины.

Энергия упругой деформации в слое n

$$V_n^{(u)} = \frac{1}{2} \int \sigma_{xn}^{(u)} \varepsilon_{xn}^{(u)} dxdydz,$$

где $\sigma_{xn}^{(u)}$ — механическое напряжение в слое n за счет смещений и изгиба. Интегрирование выполняется по объему слоя.

По закону Гука

$$\sigma_{xn}^{(u)} = \frac{E_n}{1 - \nu_n^2} \varepsilon_{xn}^{(u)}, \tag{2}$$

где E_n и ν_n — модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя n.

Тогда при $n = 1{,}2$

$$V_{1,2}^{(u)} = b \int_{-a}^{a} \frac{E_{1,2} h_{1,2}}{2(1 - \nu_{1,2}^2)} \left(\frac{dU}{dx} - \alpha_{1,2} \Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right)^2 dx;$$

при $3 \leqslant n \leqslant N$

$$V_n^{(u)} =$$

$$= b \int_{-a}^{a} \frac{E_n (h_n - h_{n-1})}{2(1 - \nu_n^2)} \left(\frac{dU}{dx} - \alpha_n \Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right)^2 dx,$$

где a и b — полудлина и ширина пластинки.

Энергия упругой деформации пластинки за счет смещений слоев

$$V^{(u)} = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(u)},$$

где N — число слоев.

Деформация изгиба пластинки [10, стр. 15]

$$\varepsilon_x^{(w)} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} + \varepsilon_{x0}, \tag{3}$$

где ε_{x0} — деформация плоскости раздела слоев 1 и 2 (см. рисунок).

Механическое напряжение в слое n за счет изгиба

$$\sigma_{xn}^{(w)} = \frac{E_n}{1-\nu_n^2}\,\varepsilon_{xn}^{(w)}. \qquad (4)$$

Тогда энергии деформаций изгиба слоев пластинки равны:

слоя 1

$$V_1^{(w)} = b\int_{-a}^{a}\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)}\left[\frac{h_1^3}{3}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - h_1^2\varepsilon_{x0}\frac{d^2w}{dx^2} + \varepsilon_{x0}^2h_1\right]dx;$$

слоя 2

$$V_2^{(w)} = b\int_{-a}^{a}\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)}\left[\frac{h_2^3}{3}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + h_2^2\varepsilon_{x0}\frac{d^2w}{dx^2} + \varepsilon_{x0}^2h_2\right]dx;$$

при $3 \leqslant n \leqslant N$

$$V_n^{(w)} = b\int_{-a}^{a}\frac{E_n}{2(1-\nu_n^2)} \times$$

$$\times\left[\frac{\left(h_n^3 - h_{n-1}^3\right)}{3}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \left(h_n^2 - h_{n-1}^2\right)\varepsilon_{x0}\frac{d^2w}{dx^2} + \right.$$

$$\left. + \ \varepsilon_{x0}^2(h_n - h_{n-a})\right]dx.$$

Энергия упругой деформации пластинки за счет изгиба

$$V^{(w)} = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(w)}.$$

Работа внешних сил [10]

$$V^{(q)} = b\int_{-a}^{a} wq dx,$$

где q — давление.

Сумма упругих деформаций за счет смещений и изгиба пластинки за вычетом работы внешних сил,

$$V^{(u)} + V^{(w)} - V^{(q)} = b\int_{-a}^{a} F dx, \qquad (5)$$

должна быть минимальной.

Для того чтобы интеграл (5) имел экстремум, подынтегральное выражение должно удовлетворять уравнениям Эйлера [11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{x0}} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial U'} = 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial w''} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial w'} + \dfrac{\partial F}{\partial w} = 0, \end{cases}$$

где $U' = \dfrac{dU}{dx}$, $w' = \dfrac{dw}{dx}$, $w'' = \dfrac{d^2w}{dx^2}$,

или

$$\begin{cases} \dfrac{d^2w}{dx^2} = -\varepsilon_{x0} = \dfrac{2B}{C}, \\ \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d^2w}{dx^2} = 0, \\ \dfrac{d^4w}{dx^4} + \dfrac{C}{A}\dfrac{d^2\varepsilon_{x0}}{dx^2} - \dfrac{B}{A} \times \\ \times\left[2\dfrac{d^2U}{dx^2}\dfrac{dw}{dx} + 2\dfrac{dU}{dx}\dfrac{d^2w}{dx^2} + 3\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\dfrac{d^2w}{dx^2}\right] + \\ + 2\dfrac{B_\alpha\Delta T}{A}\dfrac{d^2w}{dx^2} = \dfrac{2q}{A}, \end{cases} \qquad (6)$$

где

$$A = \frac{2}{3} \times$$

$$\times\left(\frac{E_1h_1^3}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2h_2^3}{1-\nu_2^2} + \frac{E_3(h_3^3 - h_2^3)}{1-\nu_3^2} + \ldots + \frac{E_N(h_N^3 - h_{N-1}^3)}{1-\nu_N^2}\right),$$

$$B = \sum_{n=1}^{N} B_n,\ B_1 = \frac{E_1h_1}{1-\nu_1^2},\ B_2 = \frac{E_2h_2}{1-\nu_2^2},\ 3 \leqslant n \leqslant N,$$

$$B_n = \frac{E_n(h_n - h_{n-1})}{1-\nu_n^2},\ B_\alpha = \sum_{n=1}^{N}\alpha_nB_n,$$

$$C =$$

$$= \left(\frac{E_2h_2^2}{1-\nu_2^2} - \frac{E_1h_1^2}{1-\nu_1^2} + \frac{E_3(h_3^2 - h_2^2)}{1-\nu_3^2} + \ldots + \frac{E_N(h_N^2 - h_{N-1}^2)}{1-\nu_N^2}\right).$$

Система уравнений (6) имеет точное решение. Преобразуем эту систему уравнений. Для этого проинтегрируем второе уравнение из (6). Тогда

$$\frac{dU}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = C_1, \qquad (7)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Подставив ε_{x0}, $\dfrac{dU}{dx}$, $\dfrac{d^2U}{dx^2}$ в последнее уравнение системы (6), получим

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \beta^2\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2q}{A - \dfrac{C^2}{2B}}; \qquad (8)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2(B_\alpha\Delta T - BC_1)}{A - \dfrac{C^2}{2B}}. \qquad (9)$$

Уравнение (8) с первыми двумя уравнениями (6) образуют новую систему уравнений. Решение уравнения (8) зависит от β^2, которое, как видно из (9), может быть как равным нулю, так и больше, и меньше нуля.

При определенных условиях ($q = 0$, $T \neq 0$) прогибы пластинки могут отсутствовать, в то время как деформации слоев будут отличны от нуля. Тогда энергия упругой деформации определяется смещениями и должна быть минимальной:

$$V_{1,2}^{(u)} = b\int_{-a}^{a}\frac{E_{1,2}h_{1,2}}{2(1-\nu_{1,2}^2)}\left(\frac{dU}{dx} - \alpha_{1,2}\Delta T\right)^2 dx,$$

при $3 \leqslant n \leqslant N$

$$V_n^{(u)} = b\int_{-a}^{a}\frac{E_n(h_n - h_{n-1})}{2(1-\nu_n^2)}\left(\frac{dU}{dx} - \alpha_n\Delta T\right)^2 dx,$$

$$V^{(u)} = \sum_{n=1}^{N} V_n^{(u)}.$$

Для того чтобы $V^{(u)}$ была минимальной, подынтегральное выражение должно удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 0,$$

решение которого

$$U = C_1'x + C_2'. \tag{10}$$

Прогибы, деформации и механические напряжения длинной прямоугольной пластинки при изменении температуры и отсутствии давления, определенные в результате решения системы уравнений (6) для свободной, жестко защемленной и свободно опертой пластинок с двумя слоями, приведены в работе [6], а с N слоями — в работе [7].

В данной работе рассматриваются прогибы, деформации и механические напряжения длинной прямоугольной пластинки с N слоями при равномерном давлении на пластинку.

Рассмотрим решения уравнения (8) при постоянном давлении и $\beta^2 > 0$, $\beta^2 < 0$.

1. $\beta^2 > 0$, $q = \text{const}$.

Общее решение однородного уравнения (8) будет

$$w_1 = C_2\cos\beta x + C_3\sin\beta x + C_4x + C_5,$$

частное решение неоднородного уравнения

$$w_2 = \frac{q}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}x^2.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения —

$$w = w_1 + w_2 = C_2\cos\beta x + C_3\sin\beta x + C_4x + C_5 + \frac{q}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}x^2. \tag{11}$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из уравнения (9):

$$C_1 = \frac{1}{B}\left(B_\alpha\Delta T - \frac{\beta^2}{2}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\right). \tag{12}$$

Применим полученное решение для определения прогибов жестко защемленной и свободно опертой пластинок.

А. *Жестко защемленная пластинка.*

При выборе осей координат так, как показано на рис. 1, $w(x) = w(-x)$ и $C_3 = C_4 = 0$. Граничными условиями для жестко защемленной пластинки являются [10]

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=\pm a} = 0 \text{ и } w|_{x=\pm a} = 0. \tag{13}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_2\cos\beta a + C_5 + \dfrac{qa^2}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} = 0, \\ -C_2\beta\sin\beta a + \dfrac{2qa}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений:

$$C_2 = \frac{2qa}{\beta^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\sin\beta a},$$

$$C_5 = -\frac{qa^2}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} - \frac{2qa\cos\beta a}{\beta^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\sin\beta a}.$$

В результате прогибы жестко защемленной пластинки равны

$$w = \frac{2qa}{\beta^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\sin(\beta a)}(\cos(\beta x) - \cos(\beta a)) + \frac{q}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}(x^2 - a^2).$$

Смещения U определим, проинтегрировав уравнение (7):

$$U = C_1x + C_6 + \left(\frac{q}{\beta^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}\right)^2 \times \left[\frac{\beta a^2(\cos(\beta x)\sin(\beta x) - \beta x)}{(\beta\sin(\beta a))^2} + \frac{4a(\sin(\beta x) - \beta x\cos(\beta x))}{\beta^2\sin(\beta a)} - \frac{2}{3}x^3\right]. \tag{14}$$

Так как $U(0) = 0$, то $C_6 = 0$.

Для определения β рассмотрим краевое условие

$$U(a) = \alpha_1 a \Delta T. \tag{15}$$

Это граничное условие может быть реализовано практически. Например, первый слой создается в результате травления кремниевой пластины, а остальные слои создаются, например, в результате окисления, выращивания, напыления.

Подставим выражение (12) в (14) и приведем полученное уравнение при $U(a) = \alpha_1 a \Delta T$ к безразмерному виду, умножив левую и правую части на a/h^2, где h — толщина пластинки. Тогда

$$\frac{(\alpha_1 B - B_\alpha) a^2 \Delta T}{Bh^2} + \frac{X^2}{2Bh^2}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{X^4}\left[\frac{\cos X \sin X - X}{X(\sin X)^2} + \frac{4(\sin X - X\cos X)}{X^2 \sin X} - \frac{2}{3X^3}\right], \tag{16}$$

где $X = \beta a,\ Q = \dfrac{qa^4}{h\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}$.

Уравнение (16) может быть решено численно или графически.

Б. *Свободно опертая пластинка.*

Решением уравнения (8) является выражение (11). При выборе осей координат, как и в предыдущем случае (см. рис. 1), $C_3 = C_4 = 0$.

Для свободно опертой пластинки краевыми условиями являются [10]

$$\left.\frac{d^2 w}{dx^2}\right|_{x = \pm a} = 0 \text{ и } w|_{x = \pm a} = 0, \tag{17}$$

из которых определяются C_2 и C_5.

$$C_2 = \frac{2q}{\beta^4\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)\cos\beta a},$$

$$C_5 = -\frac{2q}{\beta^4\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)} - \frac{qa^2}{\beta^2\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}.$$

Тогда

$$w = \frac{2q}{\beta^4\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)\cos(\beta a)}(\cos(\beta x) - \cos(\beta a)) +$$

$$+ \frac{q}{\beta^2\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}(x^2 - a^2).$$

Смещения U, в соответствии с уравнением (7), равны

$$U = C_1 x + C_6 + \left(\frac{q}{\beta^2\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{(\cos(\beta x)\sin(\beta x) - \beta x)}{\beta^3(\cos(\beta a))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(\sin(\beta x) - \beta x\cos(\beta x))}{\beta^3 \cos(\beta a)} - \frac{2}{3}x^3\right].$$

Так как $U(0) = 0$, то $C_6 = 0$.

Рассмотрим граничное условие (15). При этом граничном условии получим уравнение, которое удобно привести к безразмерному виду, умножив левую и правую части уравнения на a/h^2, где h — толщина пластинки.

Тогда

$$\frac{(\alpha_1 B - B_\alpha) a^2 \Delta T}{Bh^2} + \frac{X^2}{2Bh^2}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{X^6}\left[\frac{5\cos X \sin X}{X(\cos X)^2} - \frac{1}{(\cos X)^2} - 4\left(1 + \frac{X^2}{6}\right)\right], \tag{18}$$

где $X = \beta a,\ Q = \dfrac{qa^4}{h\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}$.

Уравнение (18) относительно X, как и уравнение (16), может быть решено численно или графически.

2. $\beta^2 < 0$, $q = \mathrm{const}$.

В этом случае уравнение (8) может быть записано в виде

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \gamma^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2q}{A - \dfrac{C^2}{2B}}, \tag{19}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{2(BC_1 - B_\alpha \Delta T)}{A - \dfrac{C^2}{2B}}. \tag{20}$$

Общее решение однородного уравнения (19):

$$w_1 = C_2 \cosh\gamma x + C_3 \sinh\gamma x + C_4 x + C_5,$$

частное решение неоднородного уравнения:

$$w_2 = -\frac{q}{\gamma^2\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}x^2$$

и общее решение неоднородного уравнения —

$$w = w_1 + w_2 = C_2 \cosh\gamma x +$$

$$+ C_3 \sinh\gamma x + C_4 x + C_5 + \frac{q}{\gamma^2\left(A - \dfrac{C^2}{2B}\right)}x^2. \tag{21}$$

Постоянную интегрирования определим из уравнения (9):

$$C_1 = \frac{1}{B}\left(\frac{\gamma^2}{2}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right) + B_\alpha \Delta T\right).$$

Рассмотрим случаи для жестко защемленной и свободно опертой пластинок. Оси координат расположим так, как показано на рис. 1. Тогда $w(x) = w(-x)$ и $C_3 = C_4 = 0$.

А. *Жестко защемленная пластинка.*

Постоянные интегрирования найдем, использовав краевые условия (13):

$$C_2 = \frac{2qa}{\gamma^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\sinh\gamma a},$$

$$C_5 = -\frac{qa^2}{\gamma^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} - \frac{2qa\cosh\gamma a}{\gamma^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\sinh\gamma a}.$$

Тогда

$$w = \frac{q}{\gamma^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{2a}{\gamma\sinh\gamma a}(\cosh(\gamma x) - \cosh(\gamma a)) - (x^2 - a^2)\right).$$

Проинтегрировав (7), получим

$$U = C_1 x + C_6 - \left(\frac{q}{\gamma^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{a^2(\cosh(\gamma x)\sinh(\gamma x) - \gamma x)}{\gamma(\sinh(\gamma a))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4a(\sinh(\gamma x) - \gamma x\cosh(\gamma x))}{\gamma^2\sinh(\gamma a)} + \frac{2}{3}x^3\right], \qquad (22)$$

$$U(0) = 0 \text{ и } C_6 = 0.$$

Для определения γ используем граничное условие (15). Умножив левую и правую части уравнения (22) на a/h^2, при граничном условии (15), получим безразмерное уравнение для определения γ:

$$\frac{(\alpha_1 B - B_\alpha)a^2\Delta T}{Bh^2} - \frac{Y^2}{2Bh^2}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{Y^4}\left[\frac{Y - \cosh Y\sinh Y}{Y(\sinh Y)^2} + \frac{4(Y\cosh Y - \sinh Y)}{Y^2\sinh Y} - \frac{2}{3}\right], \qquad (23)$$

где $Y = \gamma a$, $Q = \dfrac{qa^4}{h\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}$.

Уравнение (23), так же как (16) и (18), может быть решено численно или графически.

Б. *Свободно опертая пластинка.*

При граничных условиях (17) имеем систему из двух уравнений, из которой определяются C_2 и C_5:

$$C_2 = \frac{2q}{\gamma^4\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)\cosh\gamma a},$$

$$C_5 = \frac{qa^2}{\gamma^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} - \frac{2q}{\gamma^4\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} \text{ и } w = \frac{q}{\gamma^2\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)} \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\gamma^2\cosh(\gamma a)}(\cosh(\gamma x) - \cosh(\gamma a)) - (x^2 - a^2)\right].$$

U находим из уравнения (7):

$$U = C_1 x + C_6 - \left(\frac{q}{\gamma^3\left(A - \frac{C^2}{2B}\right)}\right)^2 \times$$

$$\times \left[\frac{(\cosh(\gamma x)\sinh(\gamma x) - \gamma x)}{\gamma^3(\cosh(\gamma a))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(\sinh(\gamma x) - \gamma x\cosh(\gamma x))}{\gamma^3\cosh(\gamma a)} + \frac{2}{3}x^3\right]. \qquad (24)$$

Для определения γ используем граничное условие (15) и приведем полученное уравнение к безразмерной форме. Для этого умножим обе части этого уравнения на a/h^2. В результате

$$\frac{(\alpha_1 B - B_\alpha)a^2\Delta T}{Bh^2} - \frac{Y^2}{2B}\left(A - \frac{C^2}{2B}\right) =$$

$$= \frac{Q^2}{Y^4}\left[\frac{Y - \cosh Y\sinh Y}{Y^3(\cosh Y)^2} + \frac{4(Y\cosh Y - \sinh Y)}{Y^3\cosh Y} - \frac{2}{3}\right]. \qquad (25)$$

Уравнение (25), так же как (16), (18), (23), может быть решено численно или графически.

Деформации и механические напряжения слоев вычисляются по формулам (1)—(4). Упругая деформация слоя n $\varepsilon_{xn} = \varepsilon_{xn}^{(u)} + \varepsilon_{xn}^{(w)}$, а соответствующие механические напряжения — $\sigma_{xn} = \dfrac{E_n}{1 - \nu_n^2}\varepsilon_{xn}$. Полная деформация ε_{xn}^f складывается из упругой ε_{xn} и термической деформаций ($\alpha_n\Delta T$):

$$\varepsilon_{xn}^f = \varepsilon_{xn} + \alpha_n\Delta T.$$

Сравнение полученных результатов с результатами расчетов

Для сравнения с результатами расчетов, приведенных в работе [10, стр. 16], рассмотрим пластинку, состоящую из двух одинаковых слоев, и при $\Delta T = 0$: $|h_2| = |h_1|$, $h = h_1 + |h_2|$, $E_2 = E_1 = E$, $\nu_2 = \nu_1 = \nu$.

Тогда $C = 0$, $B = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $A = \dfrac{Eh^3}{6(1-\nu^2)}$.

А. *Жестко защемленная пластинка.*

Уравнение (23) в этом случае имеет вид:

$$-\frac{Y^2}{12} = 36\left(\frac{qa^4(1-\nu^2)}{Eh^4Y^2}\right)^2 \times$$

$$\times\left[\frac{Y-\cosh Y\sinh Y}{Y(\sinh Y)^2}+\frac{4(Y\cosh Y-\sinh Y)}{Y^2\sinh Y}-\frac{2}{3}\right]. \quad (26)$$

При численных значениях, использованных в работе [10], $a = 65$ см, $h = 1{,}3$ см, $E = 2{,}1\cdot10^6$ кг/см^2, $\nu = 0{,}3$, $q = 0{,}7$ кг/см^2, решением уравнения (26) является $Y = 1{,}891$ и $\gamma = 0{,}02909$.

Упругая деформация равна сумме деформаций смещения слоев (1) $\varepsilon_x^{(u)} = \dfrac{(\gamma h)^2}{12}$ и деформации изгиба (3):

$$\varepsilon_x^{(w)} = \pm\frac{6q(1-\nu^2)}{\gamma^2Eh^2}\left(\frac{\gamma a\cosh\gamma x}{\sinh\gamma a}-1\right). \quad (27)$$

Из уравнения (27) видно, что максимальная деформация изгиба наблюдается на краях пластинки ($x = a$):

$$\varepsilon_{x\max}^{(w)} = \pm\frac{6q(1-\nu^2)}{\gamma^2Eh^2}\left(\frac{\gamma a\cosh\gamma a}{\sinh\gamma a}-1\right).$$

Механические напряжения по закону Гука равны

$$\sigma_x^{(u)} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{(\gamma h)^2}{12},\ \sigma_x^{(w)} = \pm\frac{6q}{\gamma^2h^2}\left(\frac{\gamma a\cosh\gamma x}{\sinh\gamma a}-1\right). \quad (28)$$

Подстановка параметров пластинки и $\gamma = 0{,}02909$, полученное из решения уравнения (26), в уравнениях (28) дает $\sigma_x^{(u)} = 275{,}1$ кг/см^2, $\sigma_{x\max}^{(w)} = 2875$ кг/см^2. В работе [10] получены значения $\sigma_x^{(u)} = 276$ кг/см^2, $\sigma_{x\max}^{(w)} = 2874$ кг/см^2.

Б. *Свободно опертая пластинка.*

Уравнение (25) преобразуется к виду

$$-\frac{Y^2}{12} = 36Q^2 \times$$

$$\times\left[\frac{Y-\cosh Y\sinh Y}{Y^7(\cosh Y)^2}+\frac{4(Y\cosh Y-\sinh Y)}{Y^7\cosh Y}-\frac{2}{3Y^4}\right]. \quad (29)$$

При численных значениях, использованных в работе [10],

$a = 65$ см, $h = 1{,}3$ см, $E = 2{,}1\cdot10^6$ кг/см^2, $\nu = 0{,}3$, $q = 1{,}4$ кг/см^2, решением уравнения (29) является $Y = 3{,}795$ и $\gamma = 0{,}05838$.

Упругая деформация равна сумме деформаций смещения слоев (1) $\varepsilon_x^{(u)} = \dfrac{(\gamma h)^2}{12}$ и деформации изгиба (3)

$$\varepsilon_x^{(w)} = \pm\frac{6q(1-\nu^2)}{\gamma^2Eh^2}\left(\frac{\cosh\gamma x}{\cosh\gamma a}-1\right). \quad (30)$$

Из формулы (30) видно, что максимальная деформация изгиба наблюдается в центре пластинки ($x = 0$):

$$\varepsilon_{x\max}^{(w)} = \pm\frac{6q(1-\nu^2)}{\gamma^2Eh^2}\left(\frac{1}{\cosh\gamma a}-1\right).$$

Механические напряжения по закону Гука равны

$$\sigma_x^{(u)} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{(\gamma h)^2}{12};\ \sigma_x^{(w)} = \pm\frac{6q}{\gamma^2h^2}\left(\frac{\cosh\gamma x}{\cosh\gamma a}-1\right). \quad (31)$$

Подстановка параметров пластинки и $\gamma = 0{,}05838$, полученное из решения уравнения (28), в уравнениях (31) дает $\sigma_x^{(u)} = 1108$ кг/см^2, $\sigma_{x\max}^{(w)} = 1398$ кг/см^2. В работе [10] получены значения $\sigma_x^{(u)} = 1108$ кг/см^2, $\sigma_{x\max}^{(w)} = 1395$ кг/см^2.

Сравнение результатов вычислений по формулам, полученным в данной работе, с результатами работы [10] показывает их хорошее согласие, учитывая графический метод решения уравнений (25), (29) и соответствующих уравнений в работе [10].

Список литературы

1. **Tabata O., Kawahata K., Sugiyama S., Igarashi I.** Mechanical property measurements of the films using load-deflection of composite rectangular membranes // Sensors and Actuators. 1989. N 20. P. 135—141.
2. **Maier-Schneider D., Maibach J., Obermeier E.** Computer-aided characterization of the elastic properties of thin films // J. Micromech. Microeng. 1992. N 2. P. 173—175.
3. **Maier-Schneider D., Koprululu A., Ballhausen H., Obermeier E.** Elastic properties and microstructure of LPCVD polysilicon films // H. Micromech. Microeng. 1996. N 6. P. 436—446.
4. **Амеличев В. В., Вернер В. Д., Ильков А. В.** МЭМС-микрофон. Выбор материалов, конструкции и технологии. Ч. I. Электромеханический чувствительный элемент // Нано- и микросистемная техника. 2007. № 2. С. 53—67.
5. **Шашкин В. И., Вопилкин Е. А., Востоков Н. В., Климов А. Ю., Рогов В. В., Гусев С. А., Шулешова И. Ю.** Изготовление микроконсолей и управление их изгибом // Микросистемная техника. 2004. № 9. С. 22—26.
6. **Любимский В. М.** Изгиб длинной прямоугольной двухслойной пластинки при изменении температуры // Нано- и микросистемная техника. 2008. № 12. С. 6—11.
7. **Любимский В. М.** Изгиб длинной прямоугольной многослойной пластинки при изменении температуры // Материалы IX международной конференции "Актуальные проблемы электронного приборостроения АПЭП-2008". В 7 томах. Том 2. С. 54—57. Новосибирск, 2008.
8. **Любимский В. М.** Особенности деформации резистора в виде мезаструктуры // Нано- и микросистемная техника. 2007. № 2. С. 47—52.
9. **Любимский В. М.** Особенности передачи деформации от подложки к тензорезистору в виде мезаструктуры // Микроэлектроника. 2007. Т. 36. № 5. С. 1—8.
10. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

УДК 621.377.622.323

А. А. Мятиев, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
С. Н. Рязанцев, дир-р фирмы "Фарада",
И. С. Кречетов, аспирант,
Государственный технологический университет "Московский институт стали и сплавов"
E-mail:amyatiev@misis.ru

НАНЕСЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАНОПЛЕНОК НА ПОРИСТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ АНОДНОЙ КОНДЕНСАТОРНОЙ ФОЛЬГИ

Целью настоящей работы является апробация метода осаждения диэлектрика из оксида иттрия путем термического разложения раствора соли иттрия в карбоновой кислоте на поверхности алюминиевой анодной конденсаторной фольги. Были изготовлены образцы из травленой алюминиевой фольги фирмы KDK (Япония) с нанесенным на нее диэлектриком из оксида иттрия различной толщины и структуры, измерены емкостные характеристики полученных образцов, проведена оценка влияния толщины и структуры оксидного слоя на его диэлектрические свойства. Также была исследована тонкая структура полученных пленок с помощью трансмиссионной электронной микроскопии.

Ключевые слова: *электролитический конденсатор, диэлектрические нанопленки, электроемкость, рабочее напряжение, пористая анодная конденсаторная фольга*

Введение

В последние годы в мире наблюдается резкая активизация научной деятельности в области исследования материалов и разработки новых технологий изготовления конденсаторов с целью найти способы повышения их емкости и уменьшения размеров. А именно, повысился интерес к конденсаторам как к приборам, способным запасать электрическую энергию и которые возможно в будущем смогут даже заменить аккумуляторы в различных областях техники. Преимуществами конденсаторов перед другими накопителями энергии являются их долговечность (они выдерживают на несколько порядков больше циклов зарядки-разрядки чем аккумуляторы), значительно более высокие зарядные и разрядные токи (что, например, приводит к более высокой скорости зарядки до долей секунды, в то время как аккумуляторам для этого требуется несколько часов), отсутствие агрессивных химических соединений (как, например, в кислотных аккумуляторах), более широкий интервал рабочих температур, неприхотливость в эксплуатации и т. д. Все это делает конденсаторы перспективным средством аккумуляции электрической энергии для самого разнообразного технического применения.

Очевидны три направления повышения электроемкости конденсатора: увеличение диэлектрической постоянной используемого диэлектрика и поверхности обкладок и уменьшение толщины диэлектрического слоя, т. е. расстояния между обкладками [1—6].

Экспериментальная часть

Эксперименты проводились на травленой алюминиевой фольге японской фирмы KDK (рис. 1, 2) толщиной 50 мкм и с глубиной травления (т. е. глубиной пористого слоя) 5 мкм.

Распределение числа пор по диаметрам выглядит как очень узкий пик, максимум которого находится в области около 100 нм. В качестве наносимого на фольгу диэлектрика был выбран оксид иттрия Y_2O_3. Причины такого выбора — более высокое по сравнению с оксидом алюминия значение диэлектрической проницаемости и изоморфность к оксиду алюминия, которым покрыта поверхность фольги, что

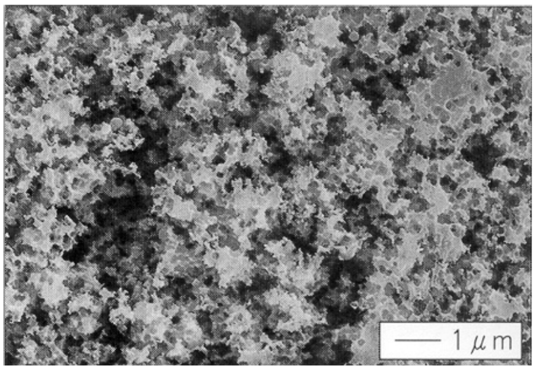


Рис. 1. Микрофотография поверхности фольги KDK

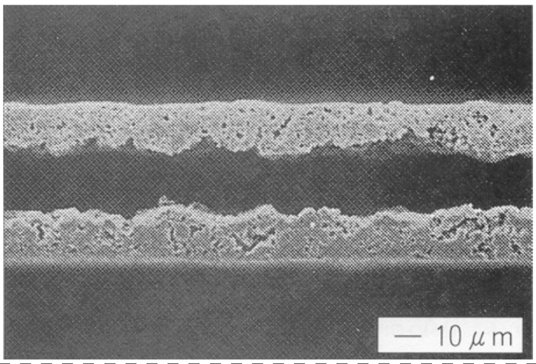


Рис. 2. Микрофотография среза фольги KDK

обеспечивает хорошую адгезию осаждаемого оксида к поверхности обкладки.

В качестве метода нанесения было выбрано термическое разложение раствора соли иттрия в карбоновой кислоте как простой, дешевый и доступный метод, позволяющий получать тонкие равномерные пленки на сложной поверхности фольги (см. рис. 1). Необходимо отметить, что нанесение плотной пленки диэлектрика на нанопористую и чрезвычайно развитую поверхность травленой алюминиевой фольги является очень сложной задачей для существующих методов нанесения тонких пленок.

Из фольги изготовлялись прямоугольные заготовки размером 25 × 120 мм, на которые затем с двух сторон наносился оксид.

Перед первым нанесением и после нанесения каждого нового слоя образец взвешивался.

Внешний вид образцов показан на рис. 3 и 4.

Были получены три пары образцов: по одному, по три и по пять слоев диэлектрика. После этого из каждой пары было выбрано по одному образцу, которые затем подверглись двухчасовому отжигу на воздухе для кристаллизации аморфного оксида иттрия. После отжига образцы также взвешивали.

Далее измерялись емкостные характеристики полученных образцов. Измерение осуществлялось по следующей методике.

Измерительная установка состоит из следующих узлов:

- измеритель иммитанса с рабочей частотой 100 Гц мод. LCZ METER 2321 NF Electronic Instruments;
- блок питания постоянного тока Б5-49;
- термометр (100 °С).

Схема измерения приведена на рис. 5.

Размеры контрольных образцов площадью рабочей части 5 см^2 с выводом для электрического подключения показаны на рис. 4. Они вырубаются специальным штампом из заготовок размером 25 × 120 мм, что обеспечивает высокую точность в соблюдении размеров образцов.

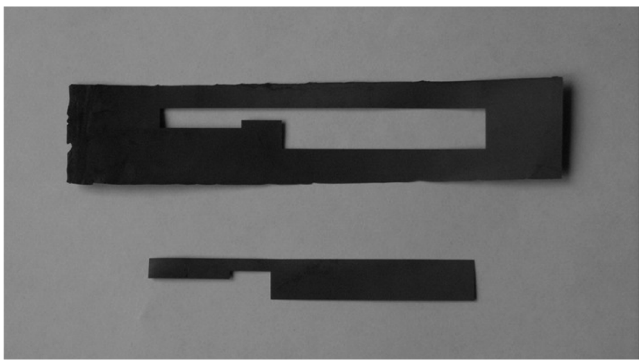


Рис. 3. Внешний вид заготовки с нанесенным диэлектриком (пять слоев с отжигом на воздухе) и вырубленный из нее образец для измерения емкости

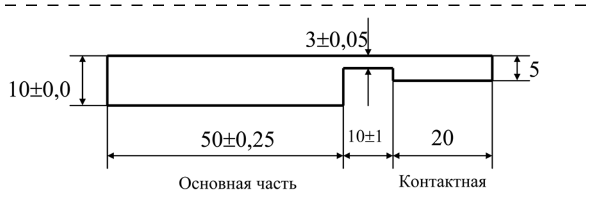


Рис. 4. Размеры образцов, подготовленных для измерения емкости

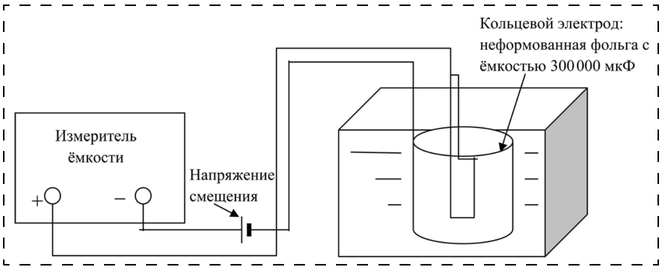


Рис. 5. Схема измерения емкости

Состав и характеристики электролита:

— деионизованная вода . . . . . . 1000 мл

— пентоборат аммония . . . . . . 8 г

Внутреннее сопротивление электролита (30 ± ± 5) Ом · см при (70 ± 2) °С; pH 7,4 при (50 ± 2) °С.

Все применяемые химикаты соответствуют требованиям к химикатам, предназначенным для использования в электролитических конденсаторах; рабочая температура электролита — (30 ± 2) °С.

Тестируемый образец погружался в измерительный электролит таким образом, чтобы верхний уровень активной части образца находился на уровне поверхности электролита.

Затем измерялась емкость полученной системы и вычислялась емкость образца $C_{обр}$. Емкость образца определяется из соотношения:

$$\frac{1}{C_{сист}} = \frac{1}{C_{яч}} + \frac{1}{C_{обр}},$$

где $C_{сист}$ — непосредственно измеренная емкость системы "измерительная ячейка − образец"; $C_{яч}$ = 300 000 мкФ — емкость измерительной ячейки; $C_{обр}$ — емкость образца.

Удельная емкость C фольги вычисляется по формуле

$$C = C_{обр}/5\ \text{см}^2.$$

Проводилось измерение емкости сначала при напряжении 50 мВ, а затем при постепенном повышении напряжения до 30 В для определения напряжения пробоя или начала расформовки диэлектрического слоя.

Результаты

Результаты взвешивания образцов сведены в графики, приведенные на рис. 6 и 7.

Рис. 6 показывает зависимость суммарной массы оксида, нанесенного на заготовку, от числа нанесенных слоев. Также указано, насколько увеличилась масса отожженных образцов. Толщина диэлектрической пленки в каждом слое оценивается в 30...50 нм.

Отжиг меняет структуру оксидной пленки. Предположительно до отжига структура пленки — аморфная, достехиометричная (структура I). Предполагается, что после отжига (структура II) кристаллизуется

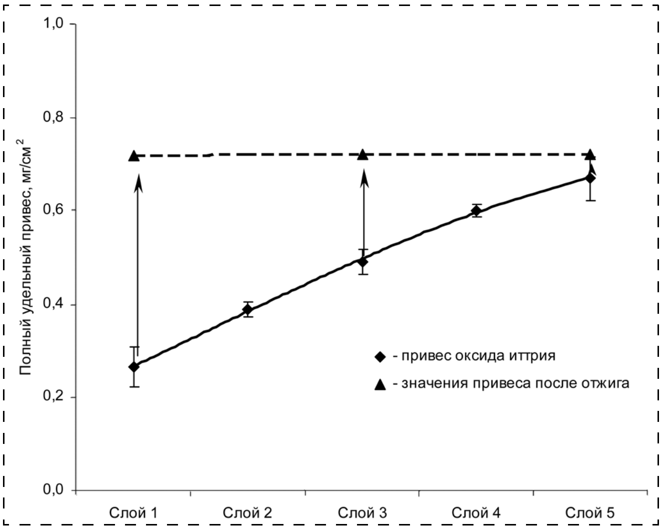


Рис. 6. Усредненные значения суммарного удельного привеса. Для точек, соответствующих привесу оксида иттрия, указано стандартное отклонение. Стрелками указано увеличение массы однослойного, трехслойного и пятислойного образцов, отобранных для отжига после его проведения

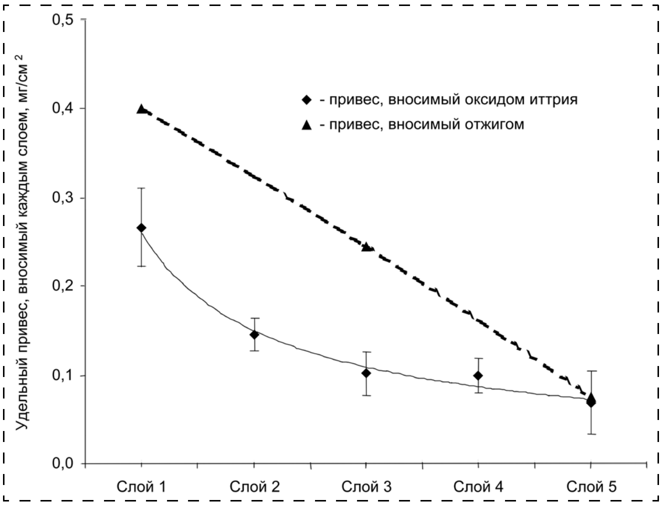


Рис. 7. Удельный привес, вносимый каждым новым нанесенным на фольгу слоем. Для точек, соответствующих привесу оксида иттрия, указано стандартное отклонение

аморфная пленка и доокисляется иттрий. Проведенные ранее рентгеноструктурные исследования кристаллизованного оксида иттрия, полученного из карбоксилата иттрия, показали, что материал имеет кубическую структуру, характерную для керамического оксида иттрия вблизи температуры плавления.

На рис. 7 приведен график зависимости удельной массы оксида, осевшего на фольге в каждом нанесенном слое, и прирост массы после отжига.

Уменьшение разового привеса с увеличением номера слоя обусловлено, по-видимому, закрытием пор на поверхности фольги каждым новым нанесенным слоем, вследствие чего уменьшается физическая поверхность образца.

Большое значение привеса после отжига, по-видимому, вызвано окислением самой алюминиевой фольги. Характерно, что с увеличением толщины пленки оксида иттрия вклад окисления в привес уменьшается. Для пятикратно нанесенной пленки оксида иттрия привеса за счет окисления почти не наблюдается. Правомерно выдвинуть две версии, объясняющие этот эффект. Первая версия — это затруднение диффузии кислорода через пленку оксида иттрия с увеличением толщины пленки. Эта версия подразумевает, что наносимая пленка является бездефектной при каждой стадии нанесения, а окисление алюминия происходит за счет диффузии кислорода через пленку оксида иттрия. Вторая версия — это залечивание дефектов в пленке оксида иттрия по мере наслаивания пленки. Эта версия подразумевает, что пленка оксида иттрия имеет дефекты, через которые происходит контакт алюминия с кислородом и его окисление. При наслаивании эти дефекты залечиваются, что исключает контакт алюминия с кислородом. Как показали исследования пленок на трансмиссионном электронном микроскопе, наиболее вероятна первая версия.

На рис. 8 представлен график, построенный по результатам измерений емкости полученных образцов. Сначала измерялась емкость при напряжении 50 мВ — это измерение чисто емкостных характеристик. Далее напряжение, подаваемое на образец при измерении, повышалось в целях определения зависимости емкости от рабочего напряжения и напряжения пробоя нанесенного диэлектрического слоя.

Самую большую емкость показал образец структуры I с одним слоем оксида иттрия. Остальные образцы показали незначительно варьирующуюся емкость, что вызвано, очевидно, закрытием пористости вследствие большой толщины слоя оксида.

Зависимость емкости от числа слоев для образцов структуры I (рис. 9) хорошо согласуется с обратно пропорциональной зависимостью емкости от толщины диэлектрика при примерно одинаковом значении ε.

Массы смеси оксидов на поверхности фольги для образцов структуры II очень близки друг к другу (см. рис. 6), т. е. не очень сильно различаются толщины оксидных пленок. Поэтому для образца с одним слоем оксида основной вклад в диэлектрическую проницаемость вносит оксид алюминия, которого больше (см. рис. 7), с низкой ε, а для образца с

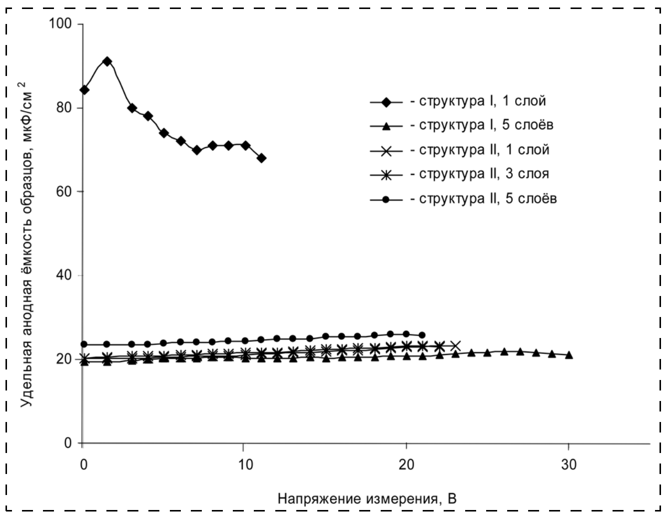


Рис. 8. Результаты измерения емкости

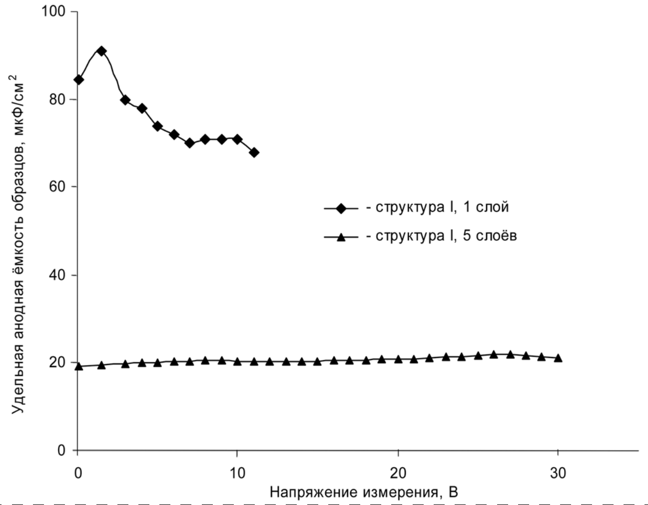


Рис. 9. Зависимость емкости от напряжения измерения для образцов структуры I

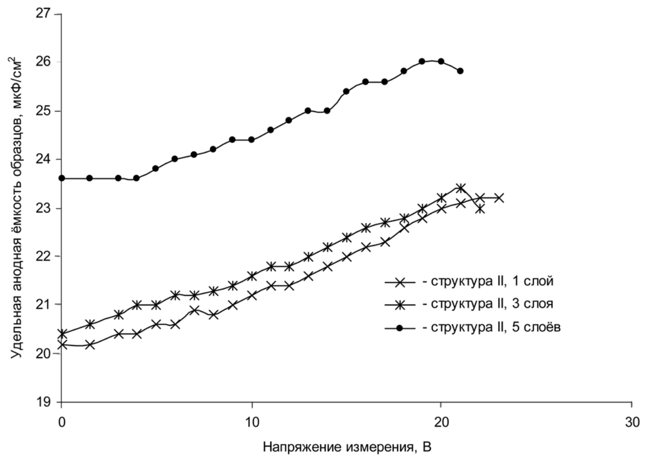


Рис. 10. Зависимость емкости от напряжения измерения для образцов структуры II

пятью слоями — оксид иттрия с большей ε. Вследствие этого, в полном соответствии с зависимостью емкости от диэлектрической проницаемости, емкость пятислойного образца — самая высокая, а однослойного — самая низкая для образцов структуры II (рис. 10).

Емкость образцов с нанокристаллическими пленками оксида иттрия, в отличие от образцов с аморфной пленкой оксида иттрия, повышается с увеличением числа слоев (рис. 10). Причем с увеличением напряжения емкость также повышается, что вероятно связано с формовкой пленки (эффект, аналогичный процессу формовки чистого алюминия, — формирование пленки окиси алюминия на поверхности алюминия). Если исходить из механизма традиционной формовки чистого алюминия, то для образцов с нанокристаллической пленкой оксида иттрия увеличение емкости может быть связано с залечиванием дефектов пленки в процессе изменения емкости. Возможно залечивание дефектов как за счет диффузии и уплотнения самой пленки оксида иттрия, так и за счет формирования оксида алюминия в дефектных местах пленки оксида иттрия. Вопрос, какой из этих двух механизмов реализуется, остается открытым.

Электрическая прочность однослойной нанокристаллической пленки оксида иттрия оказалась больше, чем электрическая прочность однослойной аморфной пленки (23,2 В и 11 В соответственно). Электрическая прочность пятислойной нанокристаллической пленки оксида иттрия меньше, чем электрическая прочность пятислойной аморфного пленки оксида иттрия, 21 В и более 30 В, соответственно.

Из сопоставительного анализа привеса (см. рис. 7) и результатов измерения емкости следует, что в результате отжига, кристаллизующего аморфную пленку оксида иттрия, образец с однослойной нанокристаллической пленкой оксида иттрия имеет на поверхности внутренний слой оксида алюминия, образованный в процессе отжига, и внешний слой нанокристаллической пленки оксида иттрия. Именно этот факт объясняет более высокую электрическую прочность однослойной нанокристаллической пленки оксида иттрия. Образец с пятислойной нанокристаллической пленкой почти не показал дополнительного привеса в результате отжига, из чего можно заключить, что этот образец содержит на поверхности практически только пленку оксида иттрия. Поэтому сопоставление электрической прочности для пятислойных образцов с аморфной и нанокристаллической пленкой оксида иттрия является более объективным. Из этого сопоставления можно сделать вывод, что диэлектрические свойства аморфной структуры оксида иттрия существенно выше диэлектрических свойств нанокристаллической структуры оксида иттрия.

Исследование тонкой структуры нанесенных пленок оксида иттрия было проведено на трансмиссионном электронном микроскопе.

Характерный вид аморфной структуры пленки оксида иттрия в трансмиссионном электронном микроскопе показан на рис. 11.

Как следует из рис. 11, даже при высоком разрешении признаков кристаллизации не наблюдается. Чередование светлых и темных пятен вероятно связано с флуктуацией плотности аморфного оксида иттрия. Размер этих областей флуктуации составляет 2...4 нм. На всех исследованных образцах с аморфной пленкой оксида иттрия каких-либо дефектов в

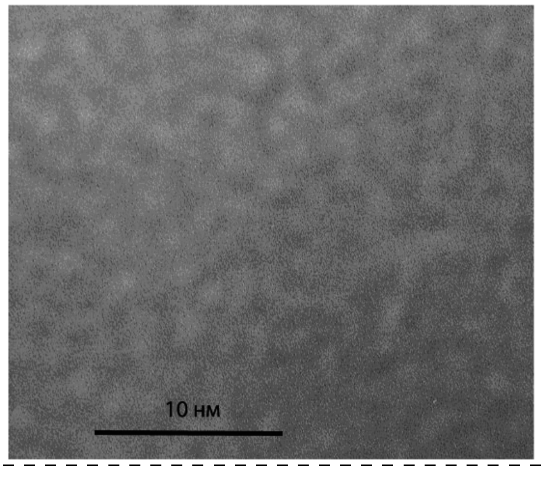


Рис. 11. Трансмиссионная электронная микроскопия аморфной пленки оксида иттрия

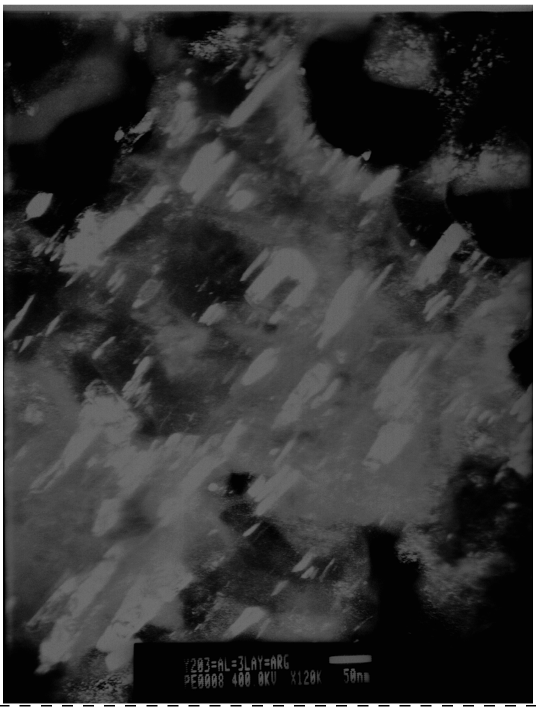


Рис. 12. Структура кристаллизованной пленки оксида иттрия в темном поле трансмиссионного электронного микроскопа

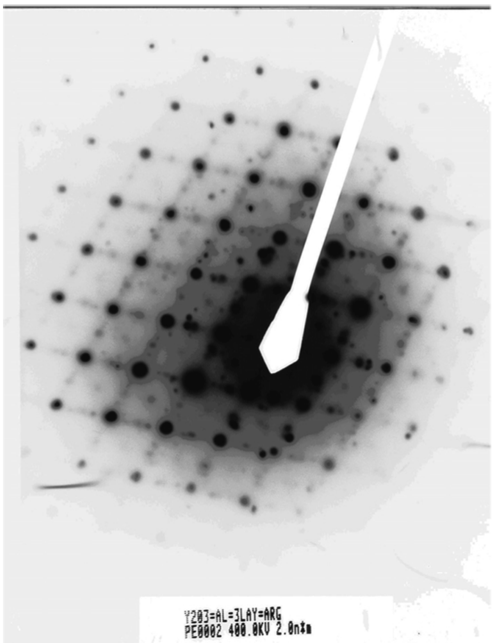


Рис. 13. Дифракционная картина кристаллизованной пленки оксида иттрия

виде микротрещин или микропор не обнаружено. Этот факт подтверждает высказанное ранее предположение, что окисление алюминия происходит за счет диффузии кислорода через пленку оксида иттрия, а не за счет окисления при проникновении кислорода по дефектам пленки. Защитный эффект аморфной пленки оксида иттрия при окислении алюминия прямо пропорционален толщине пленки.

Трансмиссионная микроскопия образцов с кристаллизованной пленкой оксида иттрия выявила интересное явление — наличие протяженных кристаллических зерен оксида иттрия, образование которых вероятно связано с эпитаксией кристаллизации оксида иттрия на поверхности зерен алюминия при когерентном совпадении решеток. Наиболее отчетливо такие зерна видны в темном поле, что показано на рис. 12. При ширине зерен от 10 до 70 нм их протяженность может достигать 150...200 нм. Дифракционный анализ кристаллической пленки оксида иттрия указывает на ее кубическую структуру (рис. 13). К сожалению, вследствие пористой и развитой поверхности алюминиевых образцов невозможно четко "привязать" наблюдаемую в микроскопе "картинку" к плоскости поверхности подложки. Несмотря на эту неопределенность наблюдаемые зерна имеют хорошо сформированную, четкую кристаллическую решетку, однако полной кристаллизации аморфной пленки не произошло. На всех исследованных образцах большие эпитаксиально кристаллизованные зерна оксида иттрия соседствуют с аморфной матрицей, что показано на рис. 14.

Большой научный и практический интерес представляло исследование тонкой структуры слоистых пленок. На трансмиссионном микроскопе были исследованы трех- и пятислойные пленки оксида иттрия. На всех образцах обнаружена четкая граница между слоями, что показано на рис. 15. Вследствие сложного рельефа поверхности подложки слои накладываются друг на друга, поэтому четкой картины последовательного наложения одного слоя на другой зафиксировать не удалось. По этой же причине не удалось точно измерить толщину каждого слоя.

Детальное изучение границ показало, что их толщина менее 1 нм. Если на границе нет резких изломов, то адгезионная связь на границе очень хорошая, что показано на рис. 16. Двойная стенка границы, по всей видимости, говорит о больших внутренних напряжениях на границе и деформации материала на атомарном уровне. В случае, когда граница имеет излом, следы деформации могут распространяться вдоль границы на расстояние до 10...12 нм в виде полос, продолжающих границу, что видно на рис. 17. В вершине излома границы зафиксирована нанопора, размер которой менее 1 нм.

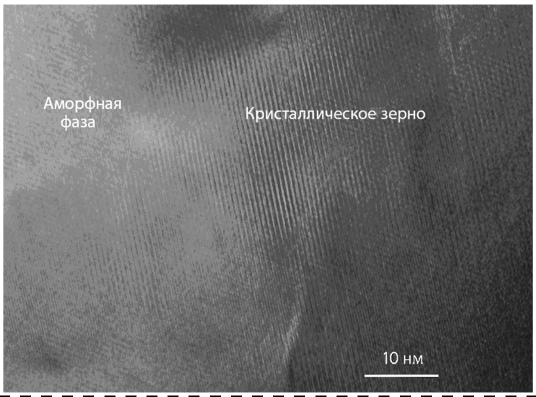


Рис. 14. Трансмиссионная микроскопия кристаллической и аморфной структуры пленки оксида иттрия

Рис. 15. Трансмиссионная микроскопия пятислойной пленки оксида иттрия на развитой поверхности анодной алюминиевой фольги

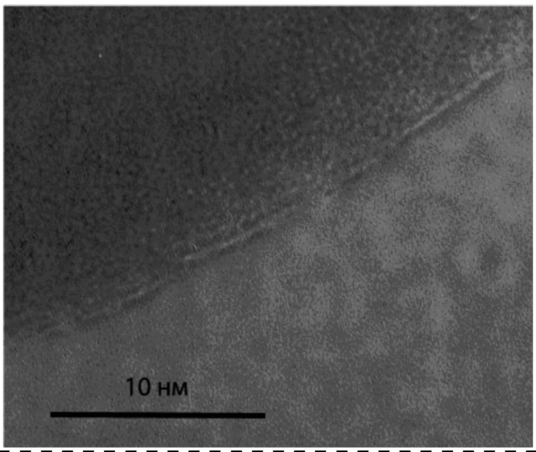


Рис. 16. Типичная граница между слоями аморфного оксида иттрия

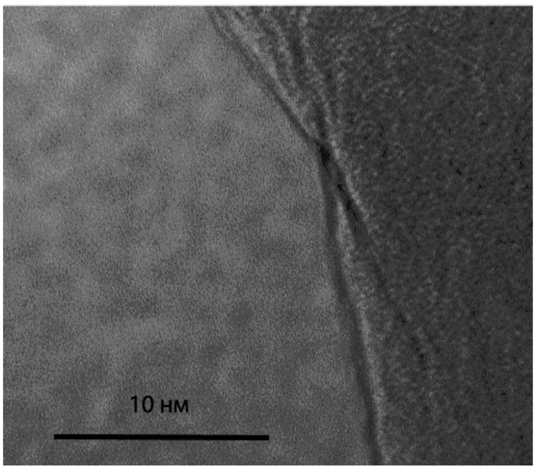


Рис. 17. Строение границы между слоями аморфного оксида иттрия в точке излома границы

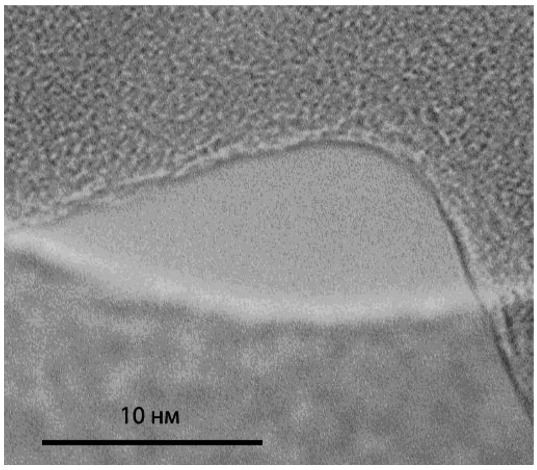


Рис. 18. Наложение двух границ между слоями аморфной пленки оксида иттрия

В случае наложения двух слоев граница проявляется более четко, что показано на рис. 18. Вероятно, это связано с более высоким уровнем напряжений в пленке, и как следствие, большей деформации на границе. Однако данное объяснение является предположительным и требует уточнения, так как возможно и другое объяснение, в частности, как чисто оптический эффект, вследствие интерференции электронов на границе. В пользу такого объяснения говорит фотография слоистой пленки, приведенная на рис. 19, на которой видны муаровые полосы, никак не связанные с границами.

Рис. 19. Муаровые полосы, не привязанные к границам между слоями

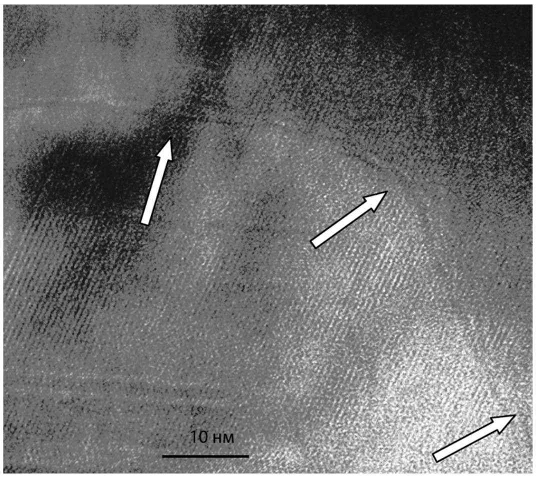


Рис. 20. Кристаллическое зерно оксида иттрия, пронизывающее границу между слоями. Граница показана стрелками

При кристаллизации пленки границы между слоями сохраняются, однако становятся менее отчетливыми. Кроме того, граница не является препятствием для кристаллизации. Кристаллическая решетка пронизывает границу практически без искажения, что видно на рис. 20. Из сказанного можно заключить, что четкая граница между слоями характерна для аморфной структуры, а локальные напряжения или деформация на границе локализованы на атомарном уровне. По крайней мере, при кристаллизации эти напряжения или деформация не приводят к образованию границ зерен, соответствующих границам между слоями.

Резюме результатов исследования структуры пленок на трансмиссионном микроскопе:

- аморфные и нанокристаллические пленки являются практически бездефектными;
- для аморфной структуры оксида иттрия характерна флуктуация плотности в областях размером от 2 до 4 нм;
- кристаллизация пленок на межфазной границе имеет склонность к образованию крупных эпитаксиальных вытянутых зерен;
- кристаллическая структура оксида иттрия является кубической;
- при наслаивании как для аморфных, так и для кристаллизованных пленок, наблюдаются четкие границы между слоями шириной менее 1 нм;
- выдвинуто предположение, что на границе формируются высокие напряжения, приводящие к деформации на атомарном уровне
- выдвинуто предположение, что при кристаллизации аморфной структуры границы между слоями не являются барьером для роста зерна.

Приведенные результаты, таким образом, показывают:

- при выбранной концентрации металла в растворе карбоксилата иттрия созданные пленки получаются недостаточно тонкими для исследуемой фольги;
- отжиг на воздухе приводит к чрезмерному окислению алюминиевой фольги, что, в свою очередь, уменьшает ее эффективную физическую поверхность и сильно меняет свойства диэлектрической пленки;
- при малой толщине пленки оксида иттрия фольга показывает высокие емкостные характеристики, что указывает на перспективность уменьшения толщины пленки путем снижения концентрации металла в растворе;
- хорошие адгезионные свойства осаждаемой термическим разложением карбоксилатов пленки оксида, делает получаемый таким образом материал очень удобным для исследований и практического применения;
- становится ясным направление дальнейших исследований в этой области: выбор материала, имеющего высокую диэлектрическую проницаемость в тонкопленочном состоянии, при этом доступного, путем сравнения емкостей, получаемых при нанесении различных оксидов на гладкую фольгу, с тем, чтобы в дальнейшем наносить выбранный оксид на пористый материал.

Выводы

1. Проведена апробация метода осаждения диэлектрика из оксида иттрия путем термического разложения соли иттрия в карбоновой кислоте на поверхность алюминиевой катодной конденсаторной фольги. Сделан вывод о перспективности применения этого метода для нанесения диэлектрика на обкладки конденсатора.

2. Анализ нанесенных пленок с точки зрения структуры и зависимости массы осаждаемого оксида от числа осажденных слоев, а также измерение и анализ зависимости емкостных характеристик образцов с разными толщиной, числом слоев и структурой диэлектрика от этих параметров показали необходимость дальнейшего уменьшения толщины диэлектрической пленки.

3. Определено направление дальнейших исследований в области получения диэлектрических тонких пленок на поверхности конденсаторной фольги в целях повышения диэлектрической постоянной и уменьшения их толщины: поиск оксида металла, имеющего наибольшую диэлектрическую проницаемость в тонкопленочной структуре.

Список литературы

1. **Семенов Б. Ю.** Силовая электроника для любителей и профессионалов. М.: СОЛОН-Р, 2001.

2. **Палатник Л. С., Черемской П. Г., Фукс М. Я.** Поры в пленках. М.: Энергоиздат, 1982.

3. **Сахновский М. Ю., Кузнецкий М. Г.** Рассеяние излучения металлической черныю // Оптика и спектроскопия. 1974. Т. 6. С. 175—180.

4. **Патент 763229 США,** МКИ H01G 9/00, 23.12.87. Aluminium Capacitor Plate for Electroluitic Capacitor and Process for Making the Same/ Ohtuka T., Murooka Y., Arai S., Nishizaki T.

5. **Патент 2098878,** H01G 9/0, 03.04.96. Способ изготовления катодной фольги и катодная фольга электролитического конденсатора / Рязанцев С. Н., Юркевич И. Н.

6. **Международная** заявка PCT/RU96/00104 от 26.04.96. Способ и устройство для напыления пористых покрытий, катодная фольга электролитического конденсатора / Рязанцев С. Н., Кошелевский В. Ф., Юркевич И. Н.

УДК 621.791.3:621.3.038

В. Н. Штенников, канд. техн. наук, зам. нач. управления,
ФГУП УЭМЗ, г. Екатеринбург

К ВОПРОСУ РАЗВИТИЯ НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ПО ПАЙКЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Среди факторов, влияющих на качество паяных соединений (время пайки, паяемость соединяемых деталей, используемый флюс, состав припоя, зазор между деталями и др.), решающее влияние имеет температура пайки.

Таким образом, развитие научного направления по обеспечению требуемых режимов конвекционной пайки электронных приборов различного назначения имеет большое практическое значение [1—4].

Ключевые слова: *прибор, сборка, МСТ, качество, пайка, температура.*

Развитие нано- и микросистемной техники (МСТ) создало предпосылки для более широкого освоения поверхностного монтажа. Последнее обстоятельство обусловливает более углубленное изучение одного из наиболее перспективных методов сборки электронных приборов — конвекционной пайки.

При отсутствии научно обоснованных рекомендаций по оптимизации параметров монтажа электронных приборов и повышению эффективности отработки соответствующих технологических процессов возрастает вероятность появления недостаточно обоснованных предложений.

Так, в статье [5] предпринята попытка выделить основные факторы, влияющие на скорость нагрева и охлаждения печатного узла при конвекционной пайке. Однако в статье не рассмотрены начальные и граничные условия, а также решение поставленной задачи, ссылки на первоисточники отсутствуют. Рекомендации основаны на ошибочной зависимости, в которой размерность левой и правой частей не совпадают. Выводы имеют противоречивый характер и не могут быть использованы специалистами в работе. В частности, из предложенного уравнения следует, что количество теплоты, передаваемой компоненту при конвекционной пайке, а следовательно, и температура будут расти до бесконечности при неограниченном увеличении времени пайки, что невозможно по причине конечной температуры теплоносителя:

$$\mathrm{Q} = hAt\Delta T, \qquad (1)$$

где Q — количество переданного тепла; h — теплоемкость материала (способность материала поглощать или отдавать тепло); A — площадь поверхности изделия; t — время; ΔT — разность температур материала и источника нагрева.

Вид формулы, обозначения и их определения взяты из оригинала.

Определим влияние основных факторов на скорость нагрева и охлаждения печатного узла при конвекционной пайке, используя модель реального печатного узла из работы [6].

В упомянутой работе приняты следующие основные допущения: постоянство коэффициента теплообмена между поверхностью печатного узла и воздухом, однородность температурного поля в объеме печатного узла.

Условие теплового баланса может быть записано в следующем виде:

$$C_{\text{п}}dt = \alpha t S_{\text{п}} d\tau, \qquad (2)$$

где $C_{\text{п}}$ — теплоемкость печатного узла, Дж · °C^{-1}; t — превышение температуры теплоносителя над температурой печатного узла в соответствующей зоне паяльной печи, °C; α — коэффициент теплообмена, Вт · °C^{-1} · м$^{-2}$; $S_{\text{п}}$ — площадь поверхности печатного узла, м$^{-2}$; τ — время, с.

Учитывая, что при нагреве $t_{\tau \to \infty} = t_{\text{т}}$; $t_{\tau \to 0} = 0$, путем элементарных преобразований получим выражение для температуры печатного узла при конвекционном нагреве:

$$t_{\text{н}} = t_{\text{т}}\left(1 - \mathbf{e}^{-\tau/\tau_{\text{о}}^{\text{н}}}\right), \qquad (3)$$

где $t_{\text{т}}$ — температура теплоносителя, °C; $\tau_{\text{о}}^{\text{н}} = \dfrac{C_{\text{п}}}{\alpha_{\text{н}} S_{\text{п}}}$ — постоянная времени нагрева печатного узла, с.

Решая аналогичную задачу для режима охлаждения, получаем:

$$t_{\text{о}} = t_{\text{т}}\mathbf{e}^{-\tau/\tau_{\text{о}}^{0}}, \qquad (4)$$

где $\tau_{\text{о}}^{0} = \dfrac{C_{\text{п}}}{\alpha_{\text{о}} S_{\text{п}}}$ — постоянная времени охлаждения печатного узла, с.

Полученные формулы позволяют достаточно корректно оценить влияние тех или иных факторов на температурный профиль конвекционной пайки, регламентированный производителями паяльных паст, международными стандартами [7—9].

В частности, из полученных зависимостей следует, что постоянные времени нагрева и охлаждения печатного узла при конвекционной пайке пропорциональны коэффициенту теплообмена, площади его поверхности и обратно пропорциональны его теплоемкости. В свою очередь коэффициенты теплообмена при нагреве и охлаждении могут различаться за счет различной скорости движения и состава теплоносителя [10, 11].

Кроме того, можно заметить, что паяные соединения, находящиеся в различных условиях обдува теплоносителем, будут нагреваться с различной скоростью. Это может привести к несоблюдению требуемого температурного режима пайки, а также к образованию дефекта "надгробного камня" [2, 3, 12].

Именно по этой причине нижняя поверхность компонентов BGA, где расположены шариковые выводы, нагревается медленнее, чем боковая поверхность компонентов и паяные соединения планарных выводов [2, 3].

Уменьшение температуры теплоносителя в соответствующей зоне паяльной печи при одновременном увеличении его скорости движения перед финишным нагревом печатного узла до температуры пайки дает возможность более равномерно прогреть электронные компоненты вне зависимости от соотношения их площади поверхности к теплоемкости [8].

Вместе с тем, наличие на печатной плате компонентов в одинаковых корпусах, отсутствие корпусов BGA позволяет исключить упомянутую выдержку без снижения качества пайки [13].

* * *

Опыт предприятия по отработке режимов конвекционной пайки электронных приборов показал, что развитие научного направления по обеспечению требуемых параметров их монтажа позволяет существенно повысить эффективность отработки технологических процессов, уточнить рекомендации международных стандартов [7, 13].

Список литературы

1. **Великанов В. Б., Денисов Ю. В.** Основы научного сопровождения производства прецизионных приборов // Новые промышленные технологии. 2008. № 1. С. 6—13.
2. **Ли Нинг-Ченг.** Технология пайки оплавлением, поиск и устранение дефектов: поверхностный монтаж, BGA, CSP и flip chip технологии. М.: Издательский дом "Технологии", 2006. 392 с.
3. **Джюд М., Бриндли К.** Пайка при сборке электронных модулей. М.: Издательский дом "Технологии", 2006. 416 с.
4. **Ланин В.** Лазерная пайка при сборке электронных модулей // Технологии в электронной промышленности. 2007. № 6. С. 40—44.
5. **Димок Ф., ДиМаттео Р.** Достижение и контроль значений охлаждения в печах оплавления // Производство электроники: технологии, оборудование, материалы. 2008. № 4. С. 51—54.
6. **Штенников В. Н.** Разогрев и охлаждение паяльного инструмента при пайке // Компоненты и технологии. 2004. № 8. С. 212—214.
7. **Штенников В. Н.** Предложения по уточнению рекомендаций международных стандартов IPC // Приборы. 2008. № 5. С. 59—63.
8. **Easy Profile 25**6 HA No-Clean Solder Paste Supplemental Data Packade. www.kester.com.
9. **Шмаков М., Тиханкин А.** Оптимизация температурного профиля пайки оплавлением // Технологии в электронной промышленности. 2008. № 1. С. 44—46.
10. **Лыков А. В**. Тепломассобмен. Справ. 2-е изд. М.: Энергия, 1978. 480 с.
11. **Reflow** ovens solution to the challenges of increased productivity and greater flexibility. http://www.global-electronics.net/link/en/20297713#20297713
12. **Причины** возникновения надгробного камня. http:/www.siplace.ru/soldering/gravestone.
13. **Штенников В. Н.** Опыт ФГУП УЭМЗ по внедрению технологии поверхностного монтажа печатных плат с Fine-Pitch-компонентами // Новые промышленные технологии. 2008. № 5. С. 42—43.

УДК 537.228.1+539.219.1

В. Ю. Тополов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
e-mail:topolov@phys.rsu.ru
А. Е. Панич, д-р техн. наук, проф., декан, директор — главный конструктор НКТБ "Пьезоприбор",
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
e-mail: piezo@sfedu.ru

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ ОТКЛИК КОМПОЗИТОВ ТИПА 1—3 "КРИСТАЛЛ РЕЛАКСОРА-СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКА — ПОЛИМЕРНАЯ МАТРИЦА С ВАРЬИРУЕМЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ"

Проанализировано поведение эффективных гидростатических пьезокоэффициентов d_h^*, g_h^*, квадрата параметра приема $(Q_h^*)^2$ и коэффициента электромеханической связи k_h^* композитов типа 1—3 "кристалл релаксора-сегнетоэлектрика — пористый полимер с отрицательным коэффициентом Пуассона" при изменении микрогеометрии и упругих свойств пористой матрицы. Установлена корреляция между отношением max $X_h^*/X_h^{(1)}$ и отношением упругих податливостей $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$ пористой матрицы композита на основе кристалла, поляризованного вдоль направления [001] перовскитовой ячейки, где $X_h^{(1)}$ — гидростатические параметры кристалла. Обсуждаются преимущества новых композитов типа 1—3.

Ключевые слова: *пьезоактивный композит типа 1—3, гидростатические параметры, кристалл релаксатора-сегнетоэлектрика, пористый полимер, упругие свойства.*

В последнее десятилетие появились работы по 1—3-композитам "кристалл твердого раствора релаксора-сегнетоэлектрика — полимер" [1—3] и связи между электромеханическими свойствами кристаллов и композитов типа 1—3 [4, 5]. Высокие пьезоактивность и пьезочувствительность данных композитов способствуют применению их в качестве активных элементов актюаторов, гидрофонов, преобразователей и других пьезотехнических устройств. В литературе ограниченно представлены результаты экспериментальных исследований эффективных свойств 1—3-композитов на основе кристаллов $(1-x)\mathrm{Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3}-x\mathrm{PbTiO_3}$(PMN—*x*PT) [2, 3] или $(1-x)\mathrm{Pb(Zn_{1/3}Nb_{2/3})O_3}-x\mathrm{PbTiO_3}$(PZN—*x*PT) [1], составы которых выбирались вблизи морфотропной границы. До настоящего времени остается мало исследованным влияние упругих свойств полимерного компонента на эффективные электромеханические свойства, гидростатические и другие параметры композитов на основе вышеупомянутых кристаллов. Кроме того, не проводилось сравнения эффективных параметров композитов типа 1—3, в состав которых входят кристаллы, поляризованные вдоль того или иного кристаллографического направления, и пористые полимеры. Среди исследованных релаксоров-сегнетоэлектриков с высокой пьезоактивностью особое место занимает кристалл PZN-0,07PT: на нем при комнатной температуре впервые измерены полные наборы электромеханических констант для двух различных направлений поляризации — вдоль

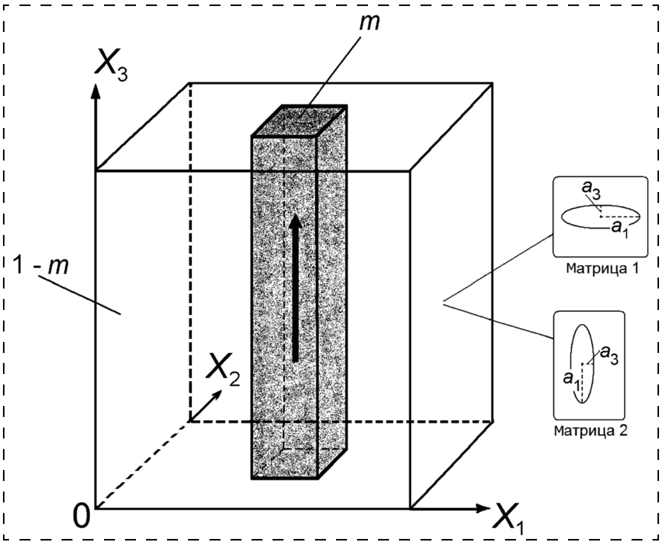


Рис. 1. Схематическое изображение фрагмента композита типа 1—3: m — объемная концентрация кристаллических стержней; $1 - m$ — объемная концентрация полимерной матрицы. Стрелкой показан вектор спонтанной поляризации кристалла. На вставке изображены сечения сфероидальных воздушных пор плоскостью (X_1OX_3), a_1 и a_3 — длины полуосей сфероидов

[001] [6] и [011] [7] перовскитовой ячейки. Среди полимеров, представляющих интерес при создании новых пьезоактивных композитов, следует выделить полимеры с отрицательным коэффициентом Пуассона $\nu^{(2)}$ (*auxetic polymers* в зарубежной литературе) [8, 9], в частности, исследовавшийся в экспериментальной работе [8] полиметакрилимид (ПМА) — пьезопассивный полимер с $\nu^{(2)} = -0{,}12$. Цель настоящей работы — анализ важных для практических применений гидростатических параметров композитов типа 1—3 "кристалл PZN-0,07PT — пористый ПМА" с варьируемыми упругими свойствами матрицы.

Рассматриваемый композит представляет собой систему протяженных вдоль оси OX_3 кристаллических стержней, регулярно расположенных в полимерной матрице (рис. 1), причем боковые грани стержней параллельны плоскостям (X_1OX_3) и (X_2OX_3). Главные кристаллографические оси X, Y, Z поляризованного вдоль [001] кристалла ориентированы следующим образом: $X\|[001]$, $Y\|[010]$, $Z\|[001]$. Для кристалла, поляризованного вдоль [011], справедливы условия $X\|[0\bar{1}1]$, $Y\|[100]$, $Z\|[011]$. Предполагается, что окружающая стержни пористая матрица содержит регулярно расположенные воздушные включения в форме сплющенного сфероида с длиной полуоси a_1, значительно меньшей стороны квадрата — основания стержня. Ориентация сфероидальных пор показана на вставке рис. 1.

Эффективные электромеханические константы композита определяются с помощью матричного метода [4] при учете граничных условий для электрических и механических полей. Эти граничные условия при x_a = const (a = 1 или 2, см. рис. 1) соответствуют непрерывности трех нормальных компонент тензора механических напряжений σ_{av}, трех тангенциальных компонент тензора механических деформаций ξ_{rt} ($r \neq a$, $t \neq a$), одной нормальной компоненты вектора электрического D_a и двух тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля E_p ($p \neq a$). В случае пористой матрицы ее свойства предварительно определяются методом эффективного поля [10] в зависимости от объемной концентрации пор m_p и отношения длин полуосей $\rho = a_1/a_3$.

Определяемые упругие податливости $_{ij}^{*E}$, пьезомодули d_{kl}^* и диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{pp}^{*\sigma}$ композита с пористой матрицей представляют собой функции m, m_p и ρ. Ниже мы рассмотрим поведение гидростатических пьезокоэффициентов

$$d_h^* = d_{33}^* + d_{32}^* + d_{31}^*, \tag{1}$$

$$g_h^* = d_h^* / \varepsilon_{33}^{*\sigma}, \tag{2}$$

гидростатического коэффициента электромеханической связи

$$k_h^* = d_h^* / (s_h^{*E} \varepsilon_{33}^{*\sigma})^{1/2} \tag{3}$$

и квадрата гидростатического параметра приема

$$(Q_h^*)^2 = d_h^* g_h^* \tag{4}$$

композита с пористой матрицей (рис. 1), где $s_h^{*E} = s_{11}^{*E} + s_{22}^{*E} + s_{33}^{*E} + 2(s_{12}^{*E} + s_{13}^{*E} + s_{23}^{*E})$ — гидростатическая податливость композита.

Расчеты проведены с использованием экспериментальных данных по кристаллу PZN-0,07PT, поляризованному вдоль [001] [6] или [011] [7], а также по полимеру ПМА [8]. Примеры концентрационных зависимостей эффективных гидростатических параметров X_h^* композита на основе кристалла, поляризованного вдоль [001], приведены на рис. 2 и 3. Кривые $X_h^*(m)$ при m_p = const и ρ = const показаны на графиках рис. 2 и 3 в интервале $0 \leqslant m \leqslant 0{,}2$, где наблюдаются максимумы всех четырех параметров X_h^*. При дальнейшем увеличении m до 1 все зависимости $X_h^*(m)$ являются монотонно убывающими. Отметим следующие особенности пьезоэлектрического гидростатического отклика композита на основе кристалла PZN-0,07PT, поляризованного вдоль [001].

Во-первых, пористая структура матрицы 1 благоприятствует усилению гидростатической пьезоактивности — значения max d_h^* у композита с матрицей 1 (рис. 2, *а*) выше, чем у композита с матрицей 2 (рис. 3, *а*). Ориентация пор в матрице 1 (см. вставку рис. 1) обусловливает монотонное возрастание отношения упругих податливостей $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$ матрицы при увеличении m_p и ρ = const (табл. 1). С увеличением $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$ гидростатические параметры X_h^* композита (табл. 1) монотонно возрастают. Отметим, что при за-

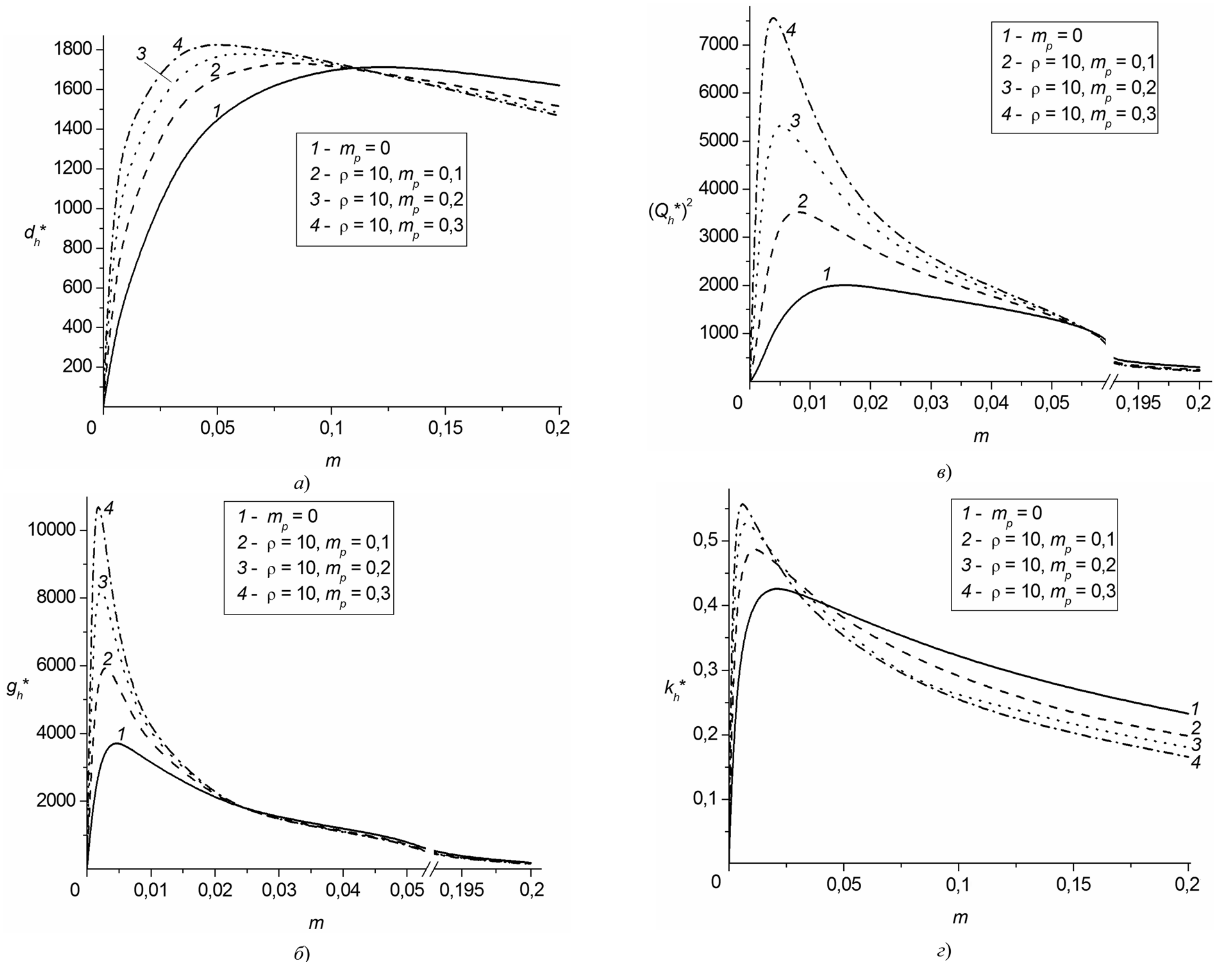


Рис. 2. Концентрационные зависимости эффективных гидростатических параметров композитов типа 1—3 "кристалл PZN-0,07PT — пористый ПМА (матрица 1)" ($0,1 \leqslant m_p \leqslant 0,3$, $\rho = 10$):

а — d_h^* (в пКл/Н); *б* — g_h^* (в мВм/Н); *в* — $(Q_h^*)^2$ (в 10^{-12} Па$^{-1}$); *г* — k_h^*. Для сравнения приводятся кривые, соответствующие $m_p = 0$

мене матрицы 1 на матрицу 2 подобной корреляции между параметрами не наблюдается.

Во-вторых, max g_h^*, max$[(Q_h^*)^2]$ и max k_h^* наблюдаются при низких объемных концентрациях кристалла ($m < 0,033$)[1] независимо от упругих свойств матрицы (матрица при $m_p = 0$, пористая матрица 1 или пористая матрица 2, ср. рис. 2, *б—г* и рис. 3, *б—г*. Такое поведение гидростатических параметров обусловлено влиянием на них диэлектрических свойств матрицы. Как следует из формул (2)—(4), сравнительно малая диэлектрическая проницаемость композита $\varepsilon_{33}^{*\sigma}$ при $m \ll 1$ и возрастание d_h^* (рис. 2, *а* и рис. 3, *а*) благоприятствует увеличению g_h^*, $(Q_h^*)^2$ и k_h^*, что реализуется при различных упругих свойствах матрицы (рис. 2, *б—г* и рис. 3, *б—г*).

[1] В работе [11] получены и исследованы 1—3-композиты "сегнетопьезокерамика — полимер" с объемными концентрациями керамики около 0,033, 0,066 и выше. Экспериментальные данные по 1—3-композитам с объемными концентрациями пьезоактивных керамик или кристаллов менее 0,033 в литературе отсутствуют.

В-третьих, высокие значения max g_h^* и max$[(Q_h^*)^2]$ (см. табл. 1) достигаются благодаря присутствию в матрице пористого полимера с $\nu^{(2)} < 0$. Это приводит к тому, что неравенства

$$d_h^* > d_{33}^* \text{ и } g_h^* > g_{33}^* \tag{5}$$

выполняются в широком интервале m благодаря положительным вкладам пьезокоэффициентов d_{3l}^* и g_{3l}^* с $l \neq 3$ (см. формулы (1) и (2)).

В-четвертых, при увеличении отношения длин полуосей сфероида ρ и m_p = const наблюдается увеличение значений всех max X_h^* (табл. 1). Это напрямую связано с изменением упругих свойств пористой матрицы 1 и с изменением баланса упругих податливостей $s_{ij}^{(1),E}$ и $s_{ij}^{(2)}$ компонентов.

Изменить баланс упругих свойств компонентов можно также при изменении направления поляризации кристалла. Данные табл. 2 показывают, что от-

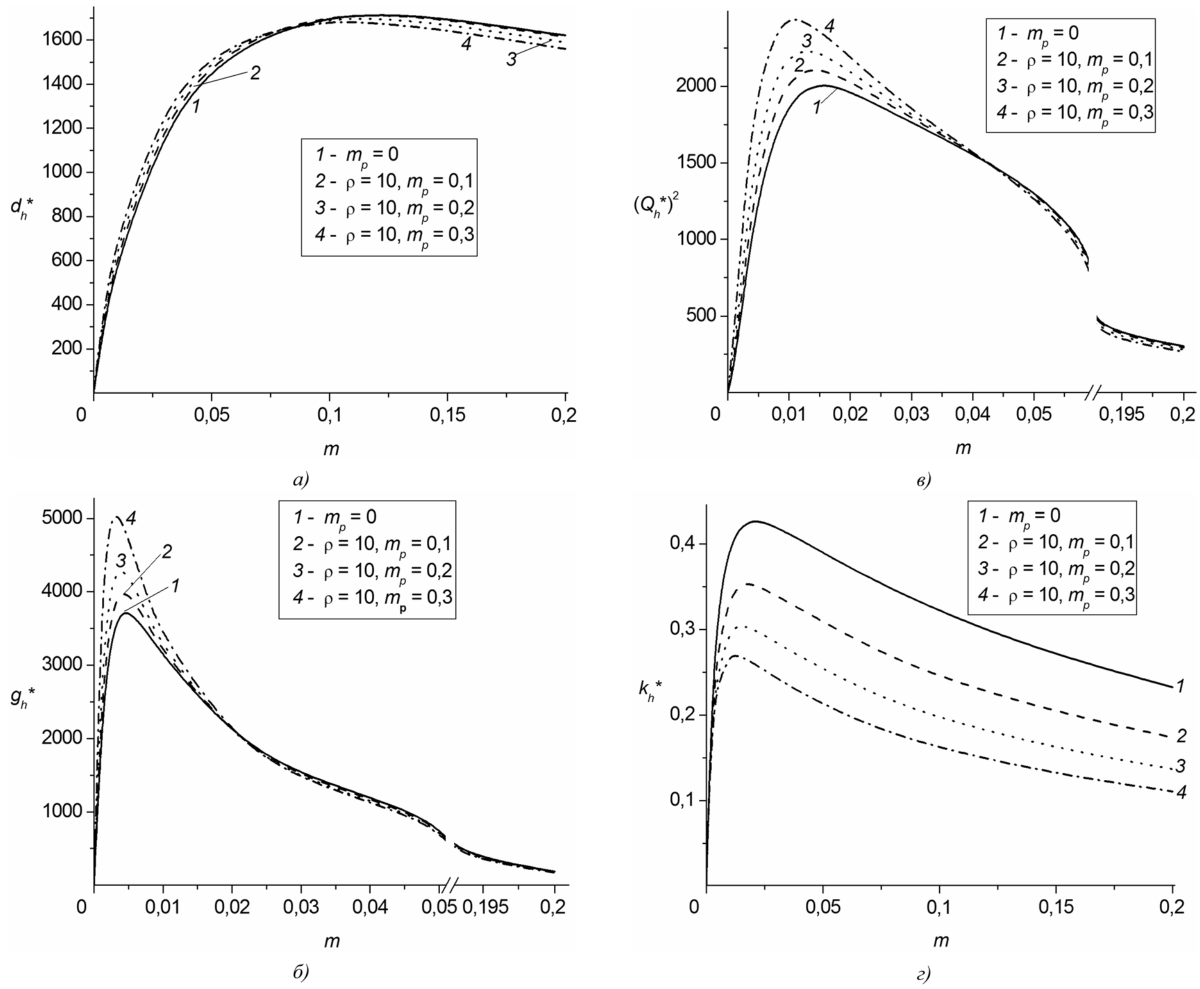


Рис. 3. Концентрационные зависимости эффективных гидростатических параметров композитов типа 1—3 "кристалл PZN-0,07PT — пористый ПМА (матрица 2)" ($0,1 \leqslant m_p \leqslant 0,3$, $\rho = 10$):

а — d_h^* (в пКл/Н); *б* — g_h^* (в мВм/Н); *в* — $(Q_h^*)^2$ (в 10^{-12} Па$^{-1}$); *г* — k_h^*. Для сравнения приводятся кривые, соответствующие $m_p = 0$

ношения max $X_h^*/X_h^{(1)}$ уменьшаются по сравнению с max $X_h^*/X_h^{(1)}$ композита на основе кристалла, поляризованного вдоль [001]. Это имеет место при относительно небольших изменениях значений max $g_{33}^*/g_{33}^{(1)}$ и max$[(Q_{33}^*)^2]/(Q_{33}^{(1)})^2$ (ср. данные табл. 1 и 2), что обусловлено неизменной ориентацией пор в матрице 1. Наблюдающиеся изменения max $X_h^*/X_h^{(1)}$ тесно связаны с изменениями баланса d_{3l}^* в (1) за счет изменений баланса упругих податливостей $s_{ij}^{(1),E}$ и $s_{ij}^{(2)}$ компонентов. Как и в случае композита на основе кристалла, поляризованного вдоль [001], неравенства (5) выполняются в широком интервале *m* вследствие упругих свойств матрицы с $\nu^{(2)} < 0$.

Полученные значения max d_h^* и max$[(Q_h^*)^2]$ исследуемого композита на основе кристалла, поляризованного вдоль [001] (см. табл. 1), больше соответственно max d_h^* и max$[(Q_h^*)^2]$ композитов типа 1—3 на основе сегнетопьезокерамики типа PZT [12] или ПКР [13] с пористыми полимерными матрицами, а также max d_h^* и max$[(Q_h^*)^2]$ 1—3-композитов с двумя пьезоактивными компонентами [14] — сегнетопьезокерамикой типа ПКР и полимером. Прогнозируемое в работе [12] значение max $k_h^* = 0,567$ близко к значениям k_h^*, соответствующим кривым *3* и *4*, и больше значений на кривых *1* и *2* рис. 2, *г*. Определенные в работе [4] для 1—0—3-композита "кристалл PMN-0,33PT, поляризованный вдоль [001], — аральдит со сферическими порами, $m_p = 0,3$" значения max $d_h^*/d_h^{(1)} = 2,66$, max$[(Q_{33}^*)^2]/(Q_{33}^{(1)})^2 = 2,19$ и max$[(Q_h^*)^2]/(Q_h^{(1)})^2 = 72,6$ меньше приведенных в табл. 1 для исследуемого композита на основе кристалла PZN-0,07PT. Такое уменьшение максимумов перечисленных эффективных параметров объясняется в основном упругими свойствами пьезопассивной матрицы. Действительно, согласно данным ра-

Таблица 1

Расчетные значения $\max X_h^*/X_h^{(1)}$ и max $X^*/X^{(1)}$ композитов "кристалл PZN-0,07PT, поляризованный вдоль [001], — пористый ПМА (матрица 1)" ($0{,}1 \leqslant m_p \leqslant 0{,}3$) и " кристалл PZN-0,07PT, поляризованный вдоль [001] — ПМА" ($m_p = 0$), и $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$ полимерной матрицы

ρ	m_p	$\max d_h^*/d_h^{(1)}$	$10^{-3}\max g_h^*/g_h^{(1)}$	$10^{-4}\max[(Q_h^*)^2]/(Q_h^{(1)})^2$	$\max k_h^*/k_h^{(1)}$	$\max g_{33}^*/g_{33}^{(1)}$	$\max[(Q_{33}^*)^2]/(Q_{33}^{(1)})^2$	$s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$
10	0,1	36,9	6,36	7,94	7,17	117	28,4	2,16
10	0,2	37,8	8,95	12,0	7,77	196	46,4	3,27
10	0,3	38,8	11,5	17,1	8,20	227	68,4	4,38
100	0,1	41,8	15,8	30,1	9,75	303	114	12,8
100	0,2	43,4	23,5	51,7	10,3	456	197	24,5
100	0,3	44,4	28,6	78,6	10,6	556	297	35,7
—	0	36,4	3,95	4,52	6,27	63,3	12,7	1

Примечание. Кристалл PZN-0,07PT, поляризованный вдоль [001] перовскитовой ячейки, при комнатной температуре характеризуется [6] следующими параметрами: $d_h^{(1)} = 47{,}0$ пКл/Н, $g_h^{(1)} = 0{,}945$ мВ · м/Н, $(Q_h^{(1)})^2 = 4{,}44 \cdot 10^{-14}$ Па$^{-1}$, $k_h^{(1)} = 0{,}0680$, $g_{33}^{(1)} = 49{,}3$ мВ · м/Н, $(Q_{33}^{(1)})^2 = 121 \cdot 10^{-12}$ Па$^{-1}$.

Таблица 2

Расчетные значения $\max X_h^*/X_h^{(1)}$ и $\max X^*/X^{(1)}$ композитов "кристалл PZN-0,07PT, поляризованный вдоль [011], — пористый ПМА (матрица 1)"

ρ	m_p	$\max d_h^*/d_h^{(1)}$	$10^{-3}\max g_h^*/g_h^{(1)}$	$10^{-3}\max[(Q_h^*)^2]/(Q_h^{(1)})^2$	$\max k_h^*/k_h^{(1)}$	$\max g_{33}^*/g_{33}^{(1)}$	$\max[(Q_{33}^*)^2]/(Q_{33}^{(1)})^2$
10	0,1	4,41	0,829	1,80	0,767	127	44,0
10	0,2	4,49	1,16	2,68	0,836	182	68,7
10	0,3	4,60	1,46	3,75	0,888	233	97,7
100	0,1	4,88	1,83	5,59	1,05	278	133
100	0,2	5,06	2,59	8,69	1,12	395	202
100	0,3	5,19	3,11	12,2	1,15	475	284

Примечание. Кристалл PZN-0,07PT, поляризованный вдоль [011] перовскитовой ячейки, при комнатной температуре характеризуется [7] следующими параметрами: $d_h^{(1)} = 168$ пКл/Н, $g_h^{(1)} = 5{,}97$ мВ · м/Н, $(Q_h^{(1)})^2 = 1{,}00 \cdot 10^{-12}$ Па$^{-1}$, $k_h^{(1)} = 0{,}476$, $g_{33}^{(1)} = 40{,}9$ мВ · м/Н, $(Q_{33}^{(1)})^2 = 47{,}0 \cdot 10^{-12}$ Па$^{-1}$.

боты [4], пористая полимерная матрица 1—0—3-композита на основе кристалла PMN-0,33PT характеризуется коэффициентом Пуассона $\nu^{(2)} > 0$ и отношением упругих податливостей $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)} = 1$. Вместе с тем, у кристалла PMN-0,33PT, поляризованного вдоль [001], значения гидростатических пьезокоэффициентов $d_h^{(1)} = 160$ пКл/Н и $g_h^{(1)} = 2{,}0$ мВ · м/Н [4] больше приведенных для PZN-0,07PT в примечании табл. 1. Таким образом, проведенное сравнение гидростатических параметров показывает, что присутствие кристаллических стержней с более высокими значениями $d_h^{(1)}$ и $g_h^{(1)}$ не обеспечивает автоматически более значительного гидростатического пьезоэлектрического отклика композита типа 1—3.

Заключение

В настоящей работе проведено прогнозирование эффективных электромеханических свойств композитов типа 1—3 на основе кристаллов PZN-0,07PT и определены максимумы эффективных гидростатических параметров данных композитов. Высокие значения максимумов гидростатических параметров $\max X_h^*/X_h^{(1)} \gg 1$ достигаются вследствие определенных соотношений между упругими и диэлектрическими свойствами компонентов и благоприятных микрогеометрических факторов. К последним следует отнести наличие системы протяженных кристаллических стержней, параллельных оси OX_3 и поляризованных вдоль [001] перовскитовой ячейки, а также системы сплющенных сфероидальных включений в полимерной матрице 1 (см. рис. 1) с отрицательным коэффициентом Пуассона. Изменения пористости и формы сфероидальных пор приводят к значительным изменениям упругих свойств матрицы и в меньшей степени к изменениям диэлектрических свойств матрицы. Показано, что возрастание отношений max $X_h^*/X_h^{(1)}$ и max $X^*/X^{(1)}$ в случае композита на основе кристалла PZN-0,07PT, поляризованного вдоль [001], коррелирует с отношением упругих податливостей $s_{33}^{(2)}/s_{11}^{(2)}$ полимерной матрицы 1 (см. табл. 1). Полученные в работе результаты указывают на перспективность применений новых композитов на основе кристаллов твердого раствора релаксора-сегнетоэлектрика в качестве элементов пьезоэлектрических преобразователей, датчиков и гидрофонов.

Авторы признательны Dr. C. R. Bowen (University of Bath, Бат, Великобритания) и Dr. P. Bisegna (University of Rome "Tor Vergata", Рим, Италия) за полезную дискуссию и интерес к тематике исследований. Работа выполнена в рамках Программы развития Южного федерального университета, и авторы благодарны за финансовую поддержку в рамках инновационного научно-образовательного проекта (грант ЮФУ К-08-Т-18, 2008 г.).

Список литературы

1. **Ritter T., Geng X., Shung K. K.** et al. Single crystal PZN/PT — polymer composites for ultrasound transducer applications // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., a. Freg. Contr. 2000. V. 47. N 4. P. 792—800.

2. **Cheng K. C., Chan H. L. W., Choy C. L.** et al. Single crystal PMN-0.33PT / Epoxy 1—3 composites for ultrasonic transducer applications // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., a. Freg. Contr. 2003. V. 50. N 9. P. 1177—1183.

3. **Wang F., He C., Tang Y.** et al. Single-crystal $0.7Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3 — 0.3PbTiOP_3$ / epoxy 1—3 piezoelectric composites prepared by the lamination technique // Mater. Chem. Phys. 2007. V. 105. NN 2—3. P. 273—277.

4. **Bezus S. V., Topolov V. Yu., Bowen C. R.** High-performance 1—3-type composites based on $(1 - x)Pb(A_{1/3}Nb_{2/3})O_3 — xPbTiO_3$ single crystals (A = Mg, Zn) // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. V. 39. N 9. P. 1919—1925.

5. **Panich A. E., Topolov V. Yu., Glushanin S. V.** High-performance 1—3-type relaxor-ferroelectric-based composites. Vibroengineering, 6^{th} Internat. Conf. Proc. Oct. 12—14, 2006. Kaunas University of Technology, Lithuania. Kaunas: Technologija, 2006. P. 226—230.

6. **Zhang R., Jiang B., Cao W., Amin A.** Complete set of material constants of $0.93Pb(Zn_{1/3}Nb_{2/3})O_3 — 0.07PbTiO_3$ domain engineered single crystal // J. Mater. Sci. Lett. 2002. V. 21. N 23. P. 1877—1879.

7. **Zhang R., Jiang B., Jiang W., Cao W.** Complete set of elastic, dielectric, and piezoelectric coefficients of $0.93Pb(Zn_{1/3}Nb_{2/3})O_3 — 0.07PbTiO_3$ single crystal poled along [011] // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89 N 24. P. 242908—3 p.

8. **Martz E. O., Lee T., Lakes R. S.** et al. // Re-entrant transformation methods in closed cell foams // Cell. Polym. 1996. V. 15. N 4. P. 229—249.

9. **Topolov V. Yu., Bowen C. R.** Characteristics of 1—3-type ferroelectric ceramic/auxetic polymer composites // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 2008. V. 16. N 1. P. 015007.

10. **Dunn M.** Effects of grain shape anisotropy, porosity, and microcracks on the elastic and dielectric constants of polycrystalline piezoelectric ceramics // J. Appl. Phys. 1995. V. 78. N 3. P. 1533—1541.

11. **Choy S. H., Chan H. L. W., Ng M. W., Liu P. C. K.** Study of 1—3 PZT fibre / epoxy composites with low volume fraction of ceramics // Integr. Ferroelectrics. 2004. V. 63. N 1—4. P. 109—115.

12. **Gibiansky L. V., Torquato S.** On the use of the homogenization theory to design optimal piezocomposites for hydrophone applications // J. Mech. Phys. Sol. 1997. V. 45. N 5. P. 689—708.

13. **Тополов В. Ю., Турик А. В.** Пористые пьезокомпозиты с экстремально высокими параметрами приема // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 9. С. 26—32.

14. **Криворучко А. В., Тополов В. Ю.** Прогнозирование гидростатического пьезоэлектрического отклика анизотропных 1—3-композитов "сегнетопьезокерамика—полимер" // Нано- и микросистемная техника. 2006. № 7. С. 35—39.

Элементы МНСТ

УДК 621.3.049.77+62-791.2

В. В. Егоров, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
ЦНИТИ "Техномаш", г. Москва,
e-mail:v-sphinks@vandex.ru

ВЛИЯНИЕ МИКРОНЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ОПТИЧЕСКИХ ПРЕЦИЗИОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЯХ. СКАЛЯРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ЧАСТЬ I.

Получено решение граничной задачи и даны выражения для статистических моментов граничного поля в приближении интегрального уравнения в задаче рассеяния акустического поля на неровной в среднем плоской поверхности. Неровности поверхности полагаются крупными гладкими.

Ключевые слова: *граничная задача, метод Кирхгофа, метод интегрального уравнения, радиус корреляции неровностей, дисперсия граничного поля.*

В настоящей работе проведена оценка влияния (микро)неровностей поверхности на характеристики рассеянного волнового поля. Показано, что они зависят от конфигурации области взаимодействия падающего поля с рассеивающей поверхностью и могут существенно отличаться от характеристик, полученных в рамках традиционно используемого Кирхгофова приближения, описывающего взаимодействие волны с поверхностью локально через коэффициенты Френеля. Настоящие результаты важны в станкостроении, машиностроении, приборостроении и т. п. для оценки качества применяемых прецизионных оптических приборов, предназначенных для обеспечения измерений параметров объекта с погрешностями, не превышающими микро- и нанометры. Кроме того, задача рассеяния волн на статистически неровной поверхности является актуальной в радиофизике, в акусто-, гидро-, оптико- и радиолокации, в лазерной и измерительной технике, предназначенной, например, для измерения шероховатости или третьей координаты в задаче высокоточного восстановления профиля объекта и т. д.

В задачах обеспечения точности обработки материалов в нано- и микродиапазонах на первое место выдвигается проблема контроля качества изготовления изделия. Например, при обработке металлов резанием, шлифованием, штамповкой, а также при электроэрозионной или ультразвуковой обработке получение требуемых точностей невозможно без текущего контроля размера и чистоты обрабатываемой поверхности. Использование для активного контроля размеров деталей приборов, основанных на оптическом контакте с поверхностью, требует обоснования, поскольку обрабатываемая поверхность детали является неровной, а неровности, как правило, соизмеримы или больше длины волны оптического когерентного излучения, применяемого для подсветки детали в области обработки. Поэтому интерпретация получаемой в области обработки картины (определение/оценка наблюдаемых характеристик рассеянного поля) является актуальной при решении рассматриваемой проблемы контроля точностей обработки в нано- и микродиапазонах.

На широкое применение полученных результатов в локации и связи указывает то, что правильная интерпретация волнового поля, рассеянного от статистически неровной поверхности, позволяет правильно интерпретировать сканируемые объекты в радиофизике, определять характеристики объектов, наблюдаемых на фоне мультипликативных помех многопутного рассеяния, в акусто-, гидро-, оптико- и радиолокации, и качество атмосферного канала связи, также подверженного влиянию помех многопутного рассеяния.

В станкостроении, в частности, считается, что когерентные (интерференционные) измерители для задачи измерения расстояний являются не только дорогими, но и не всегда способными обеспечить процедуры измерения по объекту (детали), поверхность которого не является гладкой (вернее зеркальной). Для объектов в станкостроении поверхность детали, полученной в результате обточки или обработки режущим инструментом (резцом, фрезой, шлифовальным кругом), является шероховатой (неровности поверхности больше длины оптической волны или сравнимы с ней) в видимом диапазоне. Возникает правомерный вопрос о том, насколько корректна процедура измерения интерференционным измерителем и что он измеряет в рассматриваемом случае. Указанная задача требует детального рассмотрения взаимодействия излучения, падающего на поверхность обрабатываемой детали, с засвечиваемой областью и определения оптического поля в зоне приема (обработки результатов измерения).

В работах по оптическим измерениям влияние микроструктуры поверхности объекта на качество (точность) приборов рассматривается достаточно детально только при анализе измерителей шероховатости. Во всех остальных случаях молчаливо полагается, что отражение от реальной поверхности происходит точно так же, как и от зеркала.

Именно для прецизионных оптических измерителей параметров обрабатываемых объектов вопросы отражения являются принципиально важными, поскольку они, в конечном счете, определяют границы получаемой точности приборов. В инженерной практике полагается, что "искажения" отраженного от шероховатой поверхности оптического поля можно описать исходя из Кирхгофова представления рассеянной компоненты и модели многократного отражения. Несмотря на то, что это далеко не так, работ, посвященных точному анализу границ применимости методов расчета оптического поля от поверхности, практически нет. Модельные численные эксперименты по определению фактических точностей, проведенные отдельными авторами, как правило, малоизвестны. Вместе с тем, задача оценки точности реальных прецизионных измерительных приборов поставлена и требует своего решения. В связи с этим в настоящей статье рассмотрен метод расчета границ применимости Кирхгофова приближения, позволяющий, к тому же, определить область достоверных измерений прецизионного измерителя расстояний, работающего по шероховатой поверхности.

Будем полагать, что неровности являются большими по сравнению с длиной волны, т. е. поверхность можно считать шероховатой. Для анализа поля, рассеянного на статистически неровной с крупными неровностями границе, не существует методов описания, кроме Кирхгофова приближения. По этой причине мы попытаемся дать оценку его характеристик, обусловленных шероховатостью и влияющих на параметры рассеянного когерентного сигнала. Эта задача разбивается на следующие подзадачи:

- определение подходящего метода расчета рассеянных волновых полей;
- решение динамической граничной части задачи;
- расчет компоненты поля, рассеянной в дальнюю зону.

Решение граничной задачи проведем в упрощенном варианте, полагая, что падающая волна является скалярной, неровности гладкие, кроме того, они считаются большими. Первое, что нам необходимо сделать, установить, насколько применимы существующие методы решения поставленной задачи. Считается, что если неровности поверхности большие и гладкие, то для решения скалярной или векторной задачи можно использовать метод касательной плоскости, или метод Кирхгофа.

Нелокальность граничной задачи

Насколько метод Кирхгофа решает задачу рассеяния волнового поля? Для того чтобы прояснить суть вопроса, рассмотрим интегральное уравнение, описывающее задачу рассеяния для абсолютно мягкой поверхности (аналог электропроводящей поверхности).

В работах по теории рассеяния полагается, что Кирхгофово приближение справедливо, если выполняется условие

$$k\rho\cos^3\theta \gg 1, \qquad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны падающего на рассеивающую поверхность излучения; θ — локальный угол падения поля в рассматриваемой точке; ρ — радиус кривизны поверхности в рассматриваемой точке.

Для граничного поля g имеем определяющее его интегральное уравнение [1]

$$U(r_s') = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_S g(r_s')\frac{\mathbf{e}^{ik|r_s - r_s'|}}{|r_s - r_s'|}\,d^2r_s, \qquad (2)$$

где $|r_s - r_s'| = \sqrt{|r - r'|^2 + [z(r) - z(r')]^2}$ — расстояние между точками r_s и r_s' на поверхности; $z(r)$ — высота неровности поверхности в точке r; r — радиус-вектор на подстилающей плоскости; d^2r_s — элемент рассеивающей поверхности; $|r - r'|$ — расстояние между точками r_s и r'_s на подстилающей плоскости; $U(r'_s)$ — поле, падающее на рассеивающую поверхность; $g(r'_s)$ — граничное поле в точке r'_s.

Допустим, что условие (1) определяет границы области применимости Кирхгофова приближения, и граничное поле $g_{\text{К}}$ можно определить из соотношения [1]

$$g_{\text{К}}(r) = \Re\frac{\partial U(r)}{\partial \bar{n}}, \qquad (3)$$

где $g_{\text{К}}(r)$ — граничное поле в Кирхгофовом приближении в точке r; $\Re$ — локальный коэффициент Френеля; $\frac{\partial U(r)}{\partial \bar{n}}$ — производная по нормали к поверхности в точке r.

Покажем, что условие (1) недостаточно для применимости метода Кирхгофа (он же метод касательной плоскости) при расчете поля, рассеянного абсолютно мягкой поверхностью. Необходимо, в дополнение к условию (1), учитывать размеры области взаимодействия падающего поля с рассеивающей поверхностью.

Следуя работе [1], можно записать граничное поле на поверхности в виде уравнения (2). Рассмотрим следующий критерий качества приближенного решения. Будем считать, что решение ε согласовано, если существует такое $\varepsilon \geqslant 0$, что

$$M|U_{\text{пр}}(r') - U(r')|^2 < \varepsilon < \infty, \qquad (4)$$

где M — оператор математического ожидания; $U_{\text{пр}}$ — поле, отвечающее принятому приближению.

Доказательство ограниченности условия (1) можно получить, предположив его справедливость и показав противное. В интеграле (2) от координат по поверхности удобно перейти к координатам по подстилающей плоскости XOY. Предположим, для простоты анализа, что поверхность в среднем плоская. $MU \approx MU_{\text{К}} \approx 0$, U — плоская волна, падающая нормально к поверхности, и, наконец, что радиус взаимодействия падающего поля с рассеивающей поверхностью конечен, а неровности плавные. Вместо (2) можно получить:

$$U_{\text{К}}(r') = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_S g_{\text{К}}(r)\frac{\mathbf{e}^{ik\overline{|r-r'|}}}{\overline{|r-r'|}}|N|d^2r \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{XOY}\Re\frac{\partial U(r)}{n}\frac{\mathbf{e}^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}|N|d^2r, \qquad (5)$$

где $|N| = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial}{\partial x}z(r)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}z(r)\right]^2}$.

В силу предположения, что неровности плавные и рассеивающая поверхность в среднем плоская, можно использовать аппроксимации (вернее, используются в литературе) $\overline{|r_s - r'_s|} \approx |r - r'|$, XOY — подстилающая плоскость, $r = \{x, y\}$.

Поскольку среднее значение интенсивности поля, падающего на поверхность, равно нулю, выражение для дисперсии, вычисленной в Кирхгофовом приближении, запишется в виде

$$\sigma^2_{U_{\text{К}}} = MU_{\text{К}}U^*_{\text{К}} \approx \frac{\Re^2}{4\pi^2}\int\limits_{XOY} d^2rd^2\rho M \times$$

$$\times\left[\frac{\mathbf{e}^{ik|r-r'|-jk|\rho-r'|}}{|r-r'||\rho-r'|}\frac{\partial U(r)}{\partial n}\frac{\partial U^*(\rho)}{\partial n}\right], \qquad (6)$$

где * (звездочка) — комплексное сопряжение.

В силу (1) и (3)

$$M[g_{\text{К}}(r)g^*_{\text{К}}(\rho)] < \infty.$$

Воспользуемся теперь тем, что при больших значениях $|r - r'|$ и $|\rho - r'|$ по сравнению с высотой неровностей z имеют место приближенные равенства

$$\overline{|r-r'|} \approx |r - r'| + \frac{1}{2}\frac{[z(r) - z(r')]^2}{|r-r'|}; \qquad (7)$$

$$\overline{|\rho-r'|} \approx |\rho - r'| + \frac{1}{2}\frac{[z(\rho) - z(r')]^2}{|\rho-r'|}.$$

Представим интеграл в (6) в виде суммы двух интегралов — один по области, в которой фазовый набег, определяемый вторыми слагаемыми в (7), в среднем меньше некоторого малого наперед заданного числа, а второй — по области, дополнительной к ней, т. е. (6) перепишется в виде

$$\sigma^2_{U_{\text{К}}} \approx \frac{\Re^2 U_0}{4\pi^2}\Phi + \int\limits_{\substack{|r-r'|>R\\|r-\rho|>R}} d^2rd^2\rho M \times$$

$$\times\left[\frac{\mathbf{e}^{ik|r-r'|-jk|\rho-r'|}}{|r-r'||\rho-r'|}\right]K(r, \rho)], \qquad (8)$$

где $K(r, \rho) = M\left[\frac{\partial}{\partial n}\exp\{jkz(r)\}\exp\{-jkz(\rho)\}\right]$, Φ — константа; R — радиус, задаваемый допустимым фазовым набегом, определяемым вторыми слагаемыми в разложении (7). В выражении (8) явным образом выделена область, по которой дисперсия (энергия) граничного поля легко считается.

При вычислении интеграла в (8) будем полагать, что случайное поле неровностей изотропно, однородно, Гауссово, а, кроме того, радиус корреляции случайного поля неровностей значительно меньше радиуса области взаимодействия падающего поля с рассеивающей поверхностью. (Более детальный анализ показывает, что все это необязательно, но принято с одной лишь целью — сделать прозрачными окончательные выводы.) Согласно принятым предположениям, функция корреляции $K(r, \rho)$ имеет вид

$$K(r, \rho) \approx \exp\{-\theta^2|r - \rho|^2\},$$

где $\theta = -\frac{k^2\sigma^2_z K''_z(0)}{2}$; σ^2_z — дисперсия высоты неровностей; K_z — нормированная корреляционная функция высоты неровностей.

Такое представление корреляционной функции в теории рассеяния является традиционным и не обсуждается в дальнейшем. Интерес представляет случай, когда $k^2\sigma_z^2 \gg 1$, поскольку в случае малых неровностей (обратное неравенство) рассматриваемая задача хорошо решается методом функции Грина. Поскольку модуль подынтегрального уравнения (8) экспоненциально убывает с ростом модуля $r - \rho$, то в области, определяющей значение интеграла, можно считать, что

$$|r - r'| - |\rho - r'| \approx \left(\frac{r' - r}{|r' - r|}, r - \rho\right) = \left(\frac{r' - r}{|r' - r|}, \xi\right),$$

где (,) — символ скалярного произведения; $\xi = r - \rho$.

Интеграл в (8) теперь преобразуется к виду

$$\int\limits_{|r - r'| > R} \frac{d^2 r}{|r - r'|^2} \int \mathbf{e}^{jk\left(\frac{r - r'}{|r - r'|}, \xi\right) - \theta^2\xi^2} d^2\xi =$$

$$= \frac{\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\theta^2}}}{\theta^2} \int\limits_{|r - r'| > R} \frac{d^2 r}{|r - r'|^2}. \qquad (9)$$

Пусть радиус области взаимодействия $R_{\text{вз}} \gg R$, а точка r' совпадает с центром области взаимодействия, тогда дисперсия рассеянного поля в Кирхгофовом приближении определяется в соответствии с граничной задачей еще и соотношением

$$\sigma_{U_\text{К}}^2 \approx \frac{\Re^2 U_0}{4\pi^2}\left[\Phi + \frac{\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\theta^2}}}{\theta^2}\ln\frac{R_{\text{вз}}}{R}\right]. \qquad (10)$$

Второе слагаемое, вопреки предположению о Кирхгофовой аппроксимации граничного поля, определяемого в ее рамках через локальные коэффициенты Френеля, неограниченно растет с ростом радиуса области взаимодействия. Это противоречие показывает, что при расчете рассеянных полей необходимо учитывать радиус и конфигурацию области взаимодействия даже в случае плавных неровностей и выполнении условий типа (1). Более точно,

$$\text{M}|U - U_\text{К}|^2 \geqslant \sigma_U^2 + \sigma_{U_\text{К}}^2 - 2\sigma_U\sigma_{U_\text{К}}. \qquad (11)$$

Поскольку $\sigma_{U_\text{К}}^2 = U_0^2$ ограничено, то соотношение (11) больше любого наперед заданного ξ ($\xi > 0$) при достаточно большом радиусе взаимодействия.

Отметим, что вместо приведенного выше доказательства можно было бы сослаться на "принцип фиксации особенности" [2. Теорема VII. I. I], показав предварительно, что нормы операторов, переводящих g в U, неограниченно растут с ростом радиуса области взаимодействия. Значит, согласно теореме VII. I. I, существует такой элемент пространства $\tilde{N}_2$, для которого норма вектора, полученного применением оператора (5) к g как к элементу пространства $\tilde{N}_2$, неограниченна.

На самом деле, мы доказали несколько больше, чем ограниченность условия (1), а именно, невозможность локального описания граничного поля.

Вывод расчетных соотношений.
Характеристики граничного поля

Чтобы определить характер особенностей граничного поля, рассмотрим его решение. Принимаются следующие допущения, в рамках которых предполагается справедливость метода интегрального уравнения (он же метод Лысанова [3]):

$$\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\max}^2 \approx \left|\frac{\sigma_z}{l}\right|^2 \ll 1;\ k\sigma_z\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\max} \approx \left|\frac{(k\sigma_z)^2}{kl}\right| \ll 1,$$

где $\left|\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\max}$ — производная по направлению; σ_z^2 — дисперсия высоты неровностей; $l \approx [-K_z''(0)]^{-\frac{1}{2}}$ — радиус корреляции поля неровностей.

Напомним, что в принятом приближении ядро интегрального оператора в (2) аппроксимируется ядром, зависящим от разности координат, подстилающая поверхность аппроксимируется плоскостью XOY. В этом случае интегральное уравнение (2) решается методом Фурье. Существенно, что приведенный в [3] общий вид решения интегрального уравнения (граничной задачи) был записан через спектры Фурье, а само решение исследовалось только для предельных значений параметров поля неровностей. Поэтому в [3] был сделан вывод: "...Задачу о распространении звуковых и электромагнитных волн над статистически неровными поверхностями в настоящее время удается решить лишь при весьма частных предположениях между параметрами неровностей и длиной падающей волны (теория возмущений и метод Кирхгофа). В данной работе показано, что задачу можно решить методом интегрального уравнения, объединяющим эти два случая...". Там отмечено, что "...Основным достоинством метода интегрального уравнения является возможность расчета поля при больших углах рассеяния и при скользящем распространении для достаточно крупных неровностей...".

На самом деле метод интегрального уравнения позволяет выявить зависимость решения задачи рассеяния от формы области взаимодействия падающей волны с рассеивающей поверхностью. Конечно, при исследовании решения граничной задачи для асимптотик характерных параметров ничего, отличающегося от результатов, полученных методом Кирхгофа, получить не удается. Поэтому дальше мы рассмотрим решение граничной задачи в приближении метода интегрального уравнения, записанного в координатном (а не спектральном) представлении.

В рамках принятых допущений для абсолютно мягкой плоской в среднем поверхности граничное поле определяется уравнением (5). Напомним, что полагается: $\overline{|r_s - r_s'|} \approx |r - r'|$ и $\overline{|r_s - \rho_s'|} \approx |r - \rho'|$. Можно записать преобразование Фурье от выражения

$\dfrac{e^{ik|r|}}{|r|}$. Оно равно $\dfrac{2\pi}{i\sqrt{k^2-\omega^2}}$. Запишем граничное уравнение (2) в спектральном представлении:

$$\tilde{g}(i\omega) = \frac{i}{2\pi}\sqrt{k^2-\omega^2}\,\tilde{U}(i\omega)(-4\pi),$$

где $\tilde{g}(i\omega)$ и $\tilde{U}(i\omega)$ — преобразования Фурье от g и U соответственно.

Поскольку образ Фурье от $\sqrt{k^2-\omega^2} = \dfrac{k^2-\omega^2}{\sqrt{k^2-\omega^2}}$ равен

$$\int d^2\nu \frac{e^{ik|\nu - r|}}{|\nu - r|}(k^2 + \Delta_\perp),$$

где $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{dy^2}$, то для граничного поля получаем уравнение, записанное в координатах:

$$g(r') = -\frac{1}{\pi}\int_{XOY}\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}d^2r.$$

При выводе выражения для граничного поля использовался тот факт, что поле над рассеивающей поверхностью удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2U = \Delta_\perp U + k^2U + \frac{\partial^2}{\partial z^2}U = 0.$$

Теперь, используя выражение граничного поля в координатном представлении и учитывая, что в приближении Лысанова неровности поверхности модулируют фазу падающего поля, и только, для скалярной плоской падающей волны и для абсолютно мягкой (проводящей) поверхности получаем:

$$g(r') = -\frac{1}{\pi}k^2(n_i, n_0)^2 \times$$
$$\times\, U_0\int_S\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r) + ik(n_i, n_0)z(r)}d^2r.$$

В дальнейшем мы интересуемся средним значением и корреляционной функцией граничного поля (позволяющей впоследствии оценить энергию рассеянного поля). Для простоты анализа полагаем поле неровностей Гауссовым, однородным и изотропным. Среднее значение $Mq(r')$ определяется выражением

$$Mq(r') = -\frac{1}{\pi}k^2(n_i, n_0)^2U_0 \times$$
$$\times\, M\int_S\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r) + ik(n_i, n_0)z(r)}d^2r =$$
$$-\frac{1}{\pi}k^2(n_i, n_0)^2U_0\int_S\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \times$$
$$\times\, e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r) + ik[[n_i, n_0], n_0]r - \frac{-k^2(n_i, n_0)^2\sigma_z^2}{2}}d^2r =$$
$$= 2ik(n_i, n_0)U_0e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r')}e^{\frac{-k^2(n_i, n_0)^2\sigma_z^2}{2}}, \qquad (12)$$

где σ_z^2 — дисперсия высоты неровностей.

Первое равенство в (12) следует из теоремы Фубини при условии ограниченности рассеивающей поверхности. Таким образом, среднее значение граничного поля совпадает со средним значением, полученным в приближении Кирхгофа.

Согласно приближенному выражению для граничного поля, его корреляционная функция определяется в виде

$$M[q(r')q(r'')] - M[q(r')]M[q(r'')] =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}k^4(n_i, n_0)^4\,U_0^2\int\int_{S\times S}\frac{e^{ik|r-r''|}e^{ik|\rho - r'|}}{|r-r''||\rho - r'|} \times$$
$$\times\, e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r-\rho)}\left\{Me^{ik(n_i, n_0)[z(r) - z(\rho)]} - \right.$$
$$\left. - Me^{ik(n_i, n_0)z(r)}Me^{ik(n_i, n_0)z(\rho)}\right\}d^2rd^2\rho, \qquad (13)$$

где r' и r'' — точки на поверхности.

Рассмотрим случай, когда дисперсия высоты неровностей много больше длины падающей волны, а радиус области взаимодействия рассеянного поля с поверхностью много больше радиуса корреляции высоты неровностей. В соответствии с введенными ограничениями выражение в фигурных скобках в (13) можно записать в виде

$$\left\{e^{k^2\sigma_z^2(n_i, n_0)^2K_z(r-\rho)} - 1\right\}e^{-k^2\sigma_z^2(n_i, n_0)^2}, \qquad (14)$$

где $K(r - \rho)$ — нормированная функция корреляции высоты неровностей.

Пренебрегая единицей в фигурных скобках в (14) и раскладывая корреляционную функцию в ряд Тейлора, получаем:

$$K_q(r', r'') = C\int d^2r\frac{e^{ik|r-r''|}}{|r-r''|}\int d^2\rho\frac{e^{-ik|\rho - r'|}}{|\rho - r'|} \times$$
$$\times\, e^{ik([[n_i, n_0], n_0], r-\rho) + \frac{1}{2}k^2(n_i, n_0)^2\sigma_z^2K_z''(0)(\rho - r)^2}, \qquad (15)$$

где $C = \dfrac{1}{\pi^2}k^4(n_i, n_0)^4U_0^2$.

Интеграл по r представим в виде суммы двух интегралов: один по области $|r - r'| \leqslant Nl$, а второй по дополнительной области $|r - r'| > Nl$ (здесь l — радиус корреляции неровностей рассеивающей поверхности и $N \gg 1$).

Оценим сначала вклад области $|r - r'| > Nl$. Поскольку модуль подынтегрального выражения в интеграле по ρ экспоненциально убывает с ростом $|r - \rho|$, можно воспользоваться следующей аппроксимацией выражения $|r' - \rho|$:

$$|\rho - r'| = |r - r' - (r - \rho)| \approx |r - r'| -$$
$$-\left(\frac{r - r'}{|r-r'|}, r - \rho\right). \qquad (16)$$

При вычислении интегралов в (15) можно считать, что пределы внутренних интегралов бесконечны, а ошибка за счет изменения пределов интегрирования не превышает $O\frac{\mathbf{e}^{k^2(n_i,n_0)^2\sigma_z^2 K_z''(0)(Nl)^2}}{\sqrt{k^2(n_i,n_0)^2\sigma_z^2[-K_z''(0)](Nl)^2}}$, где O — символ "o большое".

Для области $|r - r'| > Nl$ получаем

$$K_{q_1}(r', r'') =$$
$$= C\int d^2r\frac{\mathbf{e}^{ik(|r-r''|-|r-r'|)}}{|r-r''||r-r'|}\int d^2\xi\,\mathbf{e}^{i(\alpha,\xi)-\beta^2\xi^2}, \qquad (17)$$

где

$$\alpha = k\left([[n_i, n_0], n_0] - \frac{r-r'}{|r-r'|}\right); \qquad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{2}k^2(n_i, n_0)^2\sigma_z^2[-K_z''(0)].$$

Отсюда

$$K_{q_1}(r', r'') \approx \frac{C\pi}{\beta^2}\int\limits_{|r-r'|Nl} d^2r\,\mathbf{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}\frac{\mathbf{e}^{ik(|r-r''|-|r-r'|)}}{|r-r''||r-r'|}. \qquad (19)$$

Пусть область взаимодействия падающего поля с рассеивающей поверхностью — круговая радиуса $R_{\text{вз}_1}$ и $|r' - r''| \ll Nl$. В этом случае выполняется приближенное равенство

$$|r - r''| = |r - r' + r' - r''| \approx$$
$$\approx |r - r'| + \left(\frac{r-r'}{|r-r'|}r' - r''\right). \qquad (20)$$

При $[n_i, n_0] = 0$ и совпадении r' с центром области взаимодействия для K_{q_1} получается

$$K_{q_1}(r', r'') \approx \frac{C2\pi^2}{\beta^2}\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}J_0(k|r' - r''|)\ln\frac{R_{\text{вз}}}{Nl}, \qquad (21)$$

где $J_0(k|r' - r''|)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Оценим теперь вклад области $|r - r'| \leqslant Nl$. Согласно (13) имеет место

$$K_{q_2}(r', r'') = \frac{1}{\pi^2}k^4(n_i, n_0)^4 \times$$
$$\times U_0^2\iint\frac{\mathbf{e}^{ik|r-r''|}}{|r-r''|}\frac{\mathbf{e}^{-ik|\rho-r'|}}{|\rho-r'|}\mathbf{e}^{ik}([[n_i, n_0], n_0], r-\rho)\times$$
$$\times\,\mathbf{e}^{\frac{1}{2}k^2(n_i,n_0)^2\sigma_z^2K_z''(0)(r-\rho)^2}d^2rd^2\rho. \qquad (22)$$

При интегрировании по ρ воспользуемся соотношением

$$|r - \rho|^2 = |r - r'|^2 - 2|r - r'||\rho - r'|\cos\varphi +$$
$$+ |\rho - r'|^2, \qquad (23)$$

где φ — угол между векторами $r - r'$ и $\rho - r'$.

Подставив (23) в (22), выполнив замену переменной $\rho - r' = \xi$ и заменив пределы интегрирования на бесконечные, можно переписать (22) в виде

$$K_{q_2}(r', r'') =$$
$$= C\int\limits_{|r-r'|\leqslant Nl} d^2r\frac{\mathbf{e}^{ik|r-r''|}}{|r-r''|}\mathbf{e}^{ik([[n_i,n_0],n_0],r-r')-\beta^2|r-r'|^2}\times$$
$$\times\int\frac{\mathbf{e}^{-ik\xi}}{|\xi|}\mathbf{e}^{-\beta^2\xi^2+2\beta^2|r-r'||\xi|\cos\varphi}\mathbf{e}^{ik([[n_i,n_0],n_0],\xi)}d^2\xi. \qquad (24)$$

Пусть, для простоты, падающая волна падает нормально на рассеивающую поверхность, т. е. $[n_i, n_0] = 0$. Переписывая внутренний интеграл из (24) в полярных координатах, выполняя замену $\beta|\xi| = z$, выделяя затем полный квадрат для слагаемых $i\frac{k}{\beta}z - z^2$ и снова делая замену переменной $\tau = z + \frac{ik}{2\beta}$, приводим его к виду

$$I = \frac{1}{\beta}\mathbf{e}^{\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\mathbf{e}^{-ik|r-r'|\cos\varphi}\times$$
$$\times\int\limits_{\left(0+\frac{ik}{2\beta}\right)}\mathbf{e}^{-\tau^2+2\beta\tau|r-r'|\cos\varphi}d\tau. \qquad (25)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (25) деформируем контур интегрирования, а именно, воспользовавшись теоремой Коши, перепишем интеграл по τ в виде

$$I_1 = \int\limits_{0+\frac{ik}{2\beta}}^{\infty+\frac{ik}{2\beta}}\mathbf{e}^{-\tau^2+2\beta\tau|r-r'|\cos\varphi}d\tau =$$
$$= \int\limits_0^\infty\mathbf{e}^{-\tau^2+2\beta\tau|r-r'|\cos\varphi}d\tau - \int\limits_0^{i\frac{k}{2\beta}}\mathbf{e}^{-\tau^2+2\beta\tau|r-r'|\cos\varphi}d\tau. \qquad (26)$$

Второй интеграл в правой части (26), обозначаемый I_{11}, равен

$$I_{11} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathbf{e}^{\beta^2|r-r'|^2(\cos\varphi)^2}[1 - \Phi(-2\beta|r - r'|\cos\varphi)], \qquad (27)$$

где Φ — функция ошибок.

Для оценки (24) сверху полезно заметить, что

$$\frac{1}{2}[1 - \Phi(-2\beta|r - r'|\cos\varphi)] \leqslant 1, \qquad (28)$$

и оценить модули интегралов, входящих в (24), интегралами от модулей. В соответствии с этим вклад в значение корреляционной функции внутреннего интеграла в (26) справа оценивается величиной

$$\left|K_{q_2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}C\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}\int\limits_{|r-r''|\leqslant Nl}\frac{\left|\mathbf{e}^{ik|r-r''|}\right|}{|r-r''|}dr\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\beta^2|r-r'|^2(\sin\varphi)^2}d\varphi. \qquad (29)$$

Полагая далее, что r' и r'' совпадают, и пользуясь тем, что $\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\left|K_{q_2}(0)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{4\pi^2}{\beta^2}C\int_0^{\frac{2}{\pi}\beta Nl}\frac{\Phi(y)}{y\sqrt{1-\frac{y^2}{(\beta Nl)^2}}}dy. \quad (30)$$

Поскольку при y $\geqslant 0$

$$\frac{\Phi(y)}{y} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{8}\mathbf{e}^{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{1+y}, \quad (31)$$

то при $\beta Nl \gg 1$ имеет место оценка

$$\left|K_{q_2}(0)\right| \leqslant \frac{(\sqrt{5}+1)^2\pi^{\frac{7}{2}}}{4}\mathbf{e}^{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}}{\beta^2}C\ln\left(\frac{2}{\pi}\beta Nl+1\right). \quad (32)$$

Рассмотрим теперь вклад второго слагаемого в (26). Так же, как и ранее, полагаем, что r' и r'' совпадают. Интеграл в (25) для второго слагаемого в (26) перепишется в виде

$$I_{21} = \frac{i}{\beta}\mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\beta^2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\mathbf{e}^{ik|r-r'|\cos\varphi}\int_0^{\frac{k}{2\beta}}\mathbf{e}^{\tau^2-i2\beta\tau|r-r'|\cos\varphi}d\tau =$$

$$= \frac{i}{\beta}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{k}{2\beta}}\mathbf{e}^{-\frac{k}{\beta}s+s^2-2i\beta s|r-r'|\cos\varphi}ds. \quad (33)$$

Напомним, что в рассматриваемом приближении $\frac{k}{2\beta} \gg 1$ неровности пологие. Поэтому в (33) достаточно вычислить асимптотику интеграла. Последняя оказывается равной

$$I_{21} \approx \frac{2\pi}{i}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2+4\beta^2|r-r'|^2}}. \quad (34)$$

Действительно, согласно (33) имеем

$$I_{21} = -\frac{i}{\beta}\frac{1}{\left(\frac{k}{\beta}\right)}\int_0^{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\beta}\right)^2}\mathbf{e}^{-U+\frac{U^2}{\left(\frac{k}{\beta}\right)^2}}J_0\left(\frac{2U}{k}|r-r'|\right)dU. \quad (35)$$

Выбрав $\frac{k}{\beta} > L \gg 1$, раскладывая $\mathbf{e}^{\frac{U^3}{\left(\frac{k}{\beta}\right)^2}}$, интегрируя по U и устремляя затем L к бесконечности, получаем (34).

Поскольку условие плавности неровностей позволяет нам выбрать $\beta Nl \ll \frac{k}{\beta}$, то в подкоренном выражении в (34) слагаемым $4\beta^2|r-r'|^2$ можно пренебречь по сравнению с $\left(\frac{k}{\beta}\right)^2$. Поэтому имеет место равенство

$$K_{q_{21}}(0) = \frac{(2\pi)^2C}{k\beta}\int_0^{\beta Nl}\mathbf{e}^{i\frac{k}{\beta}\varsigma-\varsigma^2}d\varsigma, \quad (36)$$

где ς — переменная интегрирования (немая переменная).

Снова пользуясь тем, что нас интересует асимптотика интеграла в (36) при $\frac{k}{\beta} \gg 1$, учитывая, что $\beta Nl \gg 1$, получаем окончательно

$$K_{q_{22}}(0) = \frac{(2\pi)^2C}{k\beta}\int_0^{\beta Nl}\mathbf{e}^{i\frac{k}{\beta}\varsigma-\varsigma^2}d\varsigma. \quad (37)$$

Объединяя (31), (32) и (36) для дисперсии σ_q^2 граничного поля q в центре области взаимодействия, получаем

$$\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2C\left\{1+\frac{k^2}{2\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\ln\frac{R_{\text{вз}}}{Nl}\right\} \leqslant \sigma_q^2\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2C \times$$

$$\times\left\{1+\frac{k^2}{2\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\ln R_{\text{вз}}+\sqrt{\pi}\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{8}\mathbf{e}^{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\left(\frac{k}{\beta}\right)^2\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\ln\beta Nl\right\}. \quad (38)$$

Можно дать более точную оценку слагаемого вида $K_{q_{21}}$ с тем, чтобы показать, что σ_q^2 определяется нижней границей, установленной в (38). Представим интегралы в $K_{q_{21}}$ в полярной системе координат:

$$K_{q_{21}} = 2\pi C\int_0^{Nl}d\varsigma\mathbf{e}^{ik\varsigma-\beta^2\varsigma^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\mathbf{e}^{-ik\varsigma\cos\varphi}\times$$

$$\times\frac{\pi}{2}\mathbf{e}^{\beta^2\varsigma^2(\cos\varphi)^2}[1-\Phi(-2\varsigma\cos\varphi)]. \quad (39)$$

Преобразуем его к виду

$$K_{q_{21}} \approx C\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\beta Nl}dz\mathbf{e}^{-i\left(\frac{k}{\beta}\right)z\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\times$$

$$\times\mathbf{e}^{-z^2\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\left[1-\Phi\left(-2\frac{z}{\beta}\cos\varphi\right)\right]. \quad (40)$$

Далее разложим двойной интеграл (40) в ряд Тейлора по малому параметру β_k. Для этого заметим, что в том случае, когда $2\frac{k}{\beta}\sin^2\frac{\varphi}{2} \gg 1$, значение внутреннего интеграла в (41) можно определить приближенно формулой

$$\int_0^{\beta Nl} dz\mathbf{e}^{i2\left(\frac{k}{\beta}\right)z\sin^2\frac{\varphi}{2}}\mathbf{e}^{-z^2\sin^2\varphi} \times$$

$$\times\left[1-\Phi\left(-2\frac{z}{\beta}\cos\varphi\right)\right] \approx \frac{\pi\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\frac{k}{\beta}\sin^2\frac{\varphi}{2}} \times$$

$$\times\left\{1-\mathbf{e}^{-\beta Nl\sin^2\varphi}[1-\Phi(-2\beta Nl\cos\varphi)]\right\} \approx$$

$$\approx \frac{\pi\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\frac{k}{\beta}\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \quad (41)$$

Последнее равенство в (41) следует из условия $\beta Nl \gg 1$, второе получается вычислением интеграла в (39) методом стационарной фазы. Полагая, что $\varphi \geqslant \Delta$, можно получить, что вклад значение $K_{q_{21}}$ интеграла по отрезку $\varphi \in [\Delta, 2\pi - \Delta]$ оценивается величиной

$$K_{q_{21,\Delta}} \approx \frac{\sqrt{2}C\pi^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{k}{\beta}\right)\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\operatorname{ctg}\frac{\Delta}{2}\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (42)$$

Оценим теперь значение интеграла на отрезке $\varphi \in \in [0, \Delta] \cup [2\pi - \Delta, 2\pi]$, определяемого после очевидных упрощений формулой:

$$J \approx 2\int_0^{\Delta}d\tau\int_0^{\beta Nl}dz\mathbf{e}^{i\tau z\frac{x^2}{2}}\mathbf{e}^{-z^2x^2}[1+\Phi(z)] \approx$$

$$\approx \sqrt{\pi}\Delta\int_0^{\beta Nl}dz\frac{\Phi\left(\Delta\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2}z}\right)}{\Delta\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2}z}}[1+\Phi(z)] \approx$$

$$\approx 2\sqrt{\pi}\beta Nl\int_0^1 dz\frac{\Phi\left(\Delta\beta Nl\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2\beta Nl}z}\right)}{\Delta\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2\beta Nl}z}}[1+\Phi(z)]. \quad (43)$$

При записи (43) использовано $\sin\varphi = \varphi$ для малых значений угла. Кроме того, последнее равенство в (43) следует из условия $\beta Nl \gg 1$. Относительная погрешность представления (43) составляет $O\left(\frac{1}{\beta Nl}\right)$, где O — символ "о большое". Пользуясь теперь неравенством

$$\left|\frac{\Phi\left(\Delta\beta Nl\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2\beta Nl}z}\right)}{\Delta\beta Nl\sqrt{z^2-\frac{i\tau}{2\beta Nl}z}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{8}\mathbf{e}^{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{1+\Delta\beta Nlz}}, \quad (44)$$

справедливым при $z \geqslant 0$, приходим к оценке модуля $K_{q_{21}}(0)$ величиной

$$K_{q_{21,\Delta}} \approx \frac{\sqrt{2}C\pi^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{k}{\beta}\right)\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\operatorname{ctg}\frac{\Delta}{2} +$$

$$+\frac{C\pi^{\frac{5}{2}}}{4\beta^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{k}{2\beta}\right)^2}\mathbf{e}^{-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}(\sqrt{5}+1)^2\ln(1+\Delta\beta Nl). \quad (45)$$

Чтобы закончить рассмотрение вопроса об оценке модуля $K_{q_{21}}(0)$, необходимо выбрать значение Δ такое, при котором правая часть равенства (45) была минимальной. Соответствующие выкладки слишком громоздки и опускаются. Оптимальное значение искомого параметра определяется соотношением

$$\Delta_{\text{опт}} \approx \frac{3\beta}{4k}\sqrt{1+\frac{4k}{3\beta}\frac{1}{\beta Nl}}. \quad (46)$$

Отметим, что при оптимальном Δ и $\frac{k}{\beta} \gg \beta Nl \gg 1$, модуль $K_{q_{21}}(0)$ меньше определяемого по формуле (32) в $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\beta}}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{\pi}\beta Nl\right)}{\sqrt{\beta Nl}}$ раз.

Определим теперь дисперсию граничного поля в точке, находящейся на границе области взаимодействия падающей волны с рассеивающей поверхностью. При этом полагаем, что если точка r' находится внутри области, то она расположена на расстоянии, большем TNl, $T \geqslant 2$, l — радиус корреляции поля неровностей с рассеивающей поверхностью, и $\frac{R_{\text{вз}}}{TNl} \gg 1$. Как и раньше, при интегрировании в (15) по ρ разбиваем интеграл на два: один по области, где $|r' - r| \geqslant Nl$, другой — по дополнительной к ней. Поскольку интеграл по области $|r' - r| \leqslant Nl$ не зависит от того, в какой точке области взаимодействия рассматривается поле, то нам необходимо вычислить интеграл по дополнительной к ней области $|r' - r| \geqslant Nl$. Так как $r' \notin S_{\text{вз}}$, то при интегрировании по ρ воспользуемся аппроксимацией (16) для $|\rho - r'|$. После этого интеграл, определяющий значение корреляционной функции в области $|r' - r| \geqslant Nl$, совпадает по виду с выражением (19). Однако теперь его удобно представить в несколько иной форме. Переходя к полярным координатам, вычисляя интеграл по угловой переменной, получаем

$$K_{q_1} = \frac{2\pi C}{\beta^2} \mathbf{e}^{-\left(\frac{|\alpha|}{2\beta}\right)^2} \int_{TNl}^{2R_{вз}} \frac{d\xi}{\xi} \arccos \frac{\xi}{2R_{вз}}. \qquad (47)$$

Интегрируя по тем значениям ξ, для которых

$$\theta \leqslant \arccos\theta \leqslant \frac{\pi}{2}\theta, \qquad (48)$$

приводим (47) к виду

$$\ln\frac{R_{вз}}{TNl} - 1 \leqslant \frac{K_{q_1}(r')\beta^2}{\pi^2 C \mathbf{e}^{-\left(\frac{|\alpha|}{2\beta}\right)^2}} \leqslant \ln\frac{R_{вз}}{TNl} - \frac{2}{\pi}. \qquad (49)$$

В том случае, когда точка r' находится вне области взаимодействия, составляющие, аналогичные $K_{q_{21}}(0)$ и $K_{q_{22}}(0)$, равны нулю, поскольку равно нулю падающее поле в области, окружающей выделенную точку. В том случае, когда точка r находится внутри области взаимодействия на расстоянии, большем TNl от границы, интеграл по ρ не меняет своего значения. Пренебрегая краевыми эффектами, переходя в (19) к полярным координатам и интегрируя по угловой переменной, представляем $K_{q_1}(0)$ в виде

$$K_{q_1} = \frac{2\pi C}{\beta^2} \mathbf{e}^{-\left(\frac{|\alpha|}{2\beta}\right)^2} \int_{d-R_{вз}}^{2d+R_{вз}} \frac{d\xi}{\xi} \arccos \frac{\xi^2 + d^2 - R_{вз}}{2\xi R_{вз}}, \qquad (50)$$

где d — расстояние от центра области взаимодействия до точки r'.

Поскольку аргумент arccos меньше единицы, то справедливо соотношение (48). Поэтому

$$\ln\frac{d+R_{вз}}{d-R_{вз}l} - \frac{R_{вз}}{d} \leqslant \frac{K_{q_1}(r')\beta^2}{\pi^2 C \mathbf{e}^{-\left(\frac{|\alpha|}{2\beta}\right)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \ln\frac{d+R_{вз}}{d-R_{вз}l} - \frac{4R_{вз}}{\pi d}. \qquad (51)$$

В том случае, когда $\frac{d}{R_{вз}} \gg 1$, можно получить более точные значения для функции корреляции. Поскольку в (22) интегрирование проводится лишь по тем точкам поверхности, падающее поле в которых отлично от нуля, то справедливо представление

$$r - r'' \approx |r| + \left(\frac{r''}{|r''|}, r\right);$$

$$\rho - r' \approx |r'| + \left(\frac{r'}{|r'|}, \rho\right). \qquad (52)$$

Учитывая (52), а также то, что радиус области взаимодействия много больше радиуса корреляции поля неровностей, приводим интеграл по ρ в (22), обозначаемый через I_ρ, к виду

$$I_\rho = 2\pi \frac{\mathbf{e}^{ik|r'| - ik\left(\frac{r'}{|r'|}, r\right)}}{r'\beta^2} \mathbf{e}^{-\frac{\theta^2}{4\beta^2}}, \qquad (53)$$

где $\theta^2 = \left(\frac{r'}{|r'|} + [[n_i, n_0], n_0], n_0\right)^2$.

В случае $[n_i, n_0] = 0$ получаем:

$$K_q(r', r'') = \frac{4\pi C}{\beta^2} \mathbf{e}^{-\frac{k^2}{4\beta^2}} S_{вз} \times$$

$$\times \frac{\mathbf{e}^{ik(|r'| - |r''|)}}{|r'||r''|} \frac{J_1\left(2kR_{вз}\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2kR_{вз}\sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad (54)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка; φ — угол между векторами r' и r''.

В заключение отметим, что граничное поле в точке можно представить в виде суммы двух составляющих, первая из которых определяет Кирхгофово приближение, а вторая описывает поле, индуцированное падающим полем во всей области взаимодействия, не включающей рассматриваемую точку. Как следует из вида второй составляющей, она не может быть получена при вычислении интегралов стандартными методами (например, методом стационарной фазы), поскольку экспоненциально убывает с ростом параметра, определяющего значение интеграла.

Список литературы

1. **Басс Ф. Г., Фукс И. М.** Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.
2. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. СПб.: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2004.
3. **Шмелев А. Б.** Рассеяние волн статистически неровными поверхностями // УФН, 1972. Т. 106. Вып. 3. С. 459—481.

УДК 531.781.2

В. Д. Вавилов, д-р техн. наук, проф.,
О. Н. Глазков, аспирант АПИ НГТУ,
Арзамасский политехнический институт (филиал Нижегородского государственного технического университета)

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ МИКРОСИСТЕМНОГО АКСЕЛЕРОМЕТРА

Одним из актуальных вопросов современного приборостроения является разработка измерителей параметров движения, таких как линейные и угловые акселерометры, измерителей угловых скоростей и углов. Измерители параметров движения работают в сложных условиях — от допустимых перегрузок до ударов, например, при взлетах и посадках. В экстремальных режимах измерителям придают свойство робастности, которое выражается в загрублении чувствительности к неинформационным параметрам.

Ключевые слова: *робастный, структурная схема, микросистемный акселерометр, звено, маятник, подвес, обратная связь, передаточная функция.*

Рассмотрим микросистемный акселерометр как техническую управляемую систему, свойство робастности в которой реализуется посредством выполнения следующего условия [1]:

$$A_0 \Rightarrow \max, \qquad (1)$$

где A_0 — свободный член характеристического полинома разрабатываемого акселерометра, устремленный к максимально возможному значению по устойчивости.

Конструктивно микросистемный акселерометр выполнен из трех узлов: механического чувствительного узла (маятника), электронного блока и единого корпуса для механической и электрической частей. Непосредственно из условия робастности видно, что для придания микросистемному акселерометру свойств робастности последний должен иметь полную математическую модель в виде передаточной функции, так как других путей построения характеристического полинома нет.

На рис. 1 приведена структурная схема микросистемного акселерометра с обратной связью. Сплошными линиями на схеме показаны звенья неизменяемой части, а пунктирными — звено корректирующего устройства, структура и параметры которого должны быть получены в результате оптимизации.

Микромеханический узел состоит из трех деталей: кремниевого проводящего маятника (рис. 2) и двух одинаковых стеклянных обкладок (рис. 3), соединенных между собой анодной посадкой. Поскольку воздействия линейного и углового ускорений являются случайными и некоррелированными, то каждое движение можно описать отдельными передаточными функциями. Чувствительный элемент

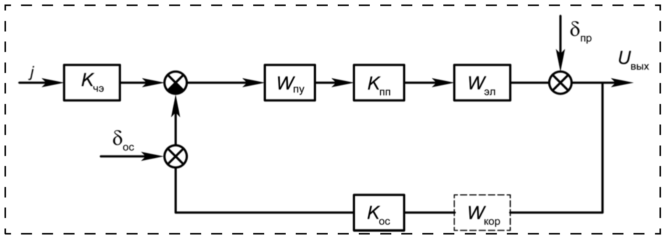


Рис. 1. Структурная схема микросистемного акселерометра

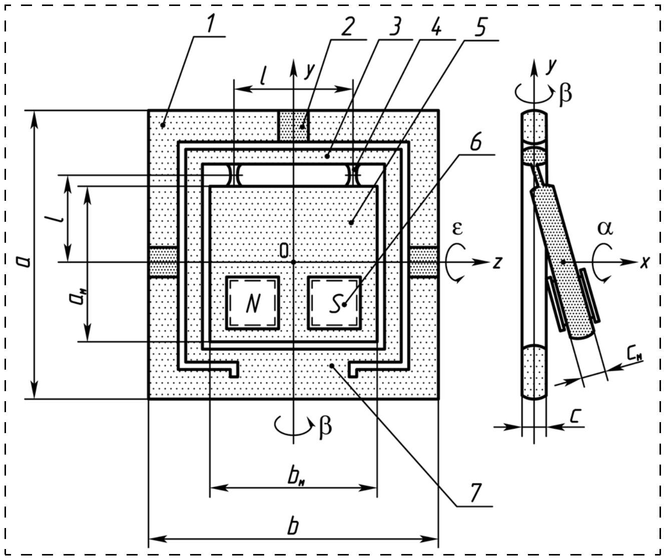


Рис. 2. Кремниевый проводящий узел:

1 — рамка; *2* — контактные площадки; *3* — пластина кристаллического элемента; *4* — упругие подвесы маятника; *5* — маятник; *6* — магниты силовой отработки; *7* — консоль

акселерометра должен быть сконструирован так, чтобы порядок передаточной функции в оптимальном варианте был минимальным, а подвижный узел имел одну степень свободы, поскольку при большем числе степеней свободы имеют место влияния поперечных составляющих ускорений, что в конечном итоге приводит к возникновению погрешностей.

Увеличенный фрагмент чувствительного элемента (ЧЭ) приведен на рис. 2. В данной конструктивной схеме подвесов при соотношении ширины и толщины балки упругого подвеса $b_п \gg c_п$ подвижный узел имеет одну степень свободы, а коэффициенты будут следующими: $k = 0$; $b_0 = 1$; $n = 2$. Далее будем рассматривать передаточную функцию подвижного узла только по угловой составляющей [2]:

$$W_{п.у}(s) = \frac{K_{чэ}}{J_z s^2 + K_{д.у} + G_у}, \qquad (2)$$

s —оператор Лапласа; $K_{чэ} = ml_ц$ — маятниковость ЧЭ; J_z — момент инерции маятника относительно оси z; $K_{д.у}$ — абсолютный коэффициент демпфирования угловых движений относительно оси z; $G_у$ — угловая жесткость, зависящая от формы балки, $G_у = \dfrac{E_{[100]} I(C_{п\ min})}{a_п} f(\gamma)$, где $E_{[100]}$ — модуль Юнга для

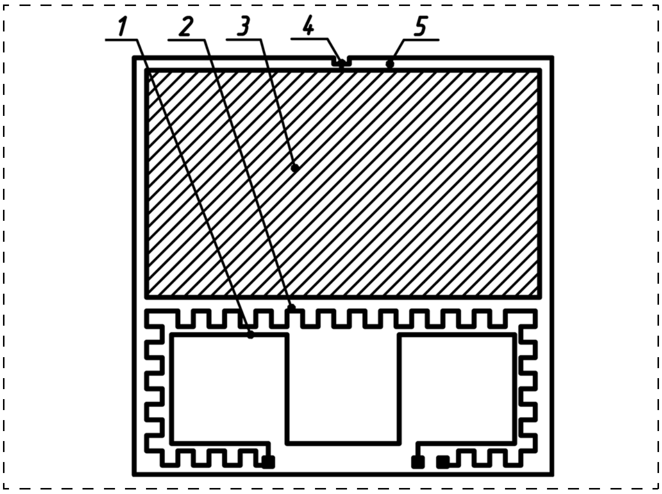


Рис. 3. Стеклянная обкладка:

1 — возвращающая обмотка L; *2* — нагрузочный резистор $R_н$; *3* — проводящий электрод емкостного датчика угла; *4* — перекидка проводящей дорожки на другую сторону пластины; *5* — несущая пластина

кремния в направлении [100], $I(C_{п\,min})$ — момент инерции сечения подвеса, $\gamma = \dfrac{C_{п\,max} - C_{п\,min}}{C_{п\,min}}$, $C_{п\,max}$, $C_{п\,min}$ — максимальная и минимальная толщина подвеса; $f(\gamma) = \left[\dfrac{3\mathrm{arctg}\sqrt{2\gamma}}{4\sqrt{2\gamma}} + \dfrac{5+6\gamma}{4(1+2\gamma)^2}\right]$ — функция, учитывающая влияние кривизны обводов по толщине на жесткость упругого подвеса.

На рис. 3 показана топология размещения элементов на неподвижной обкладке. Запишем далее передаточные функции и коэффициенты звеньев неизменяемой части структурной схемы (см. рис. 1). Преобразователь перемещений может быть емкостным, магниторезисторным или выполненным на полевом эффекте (механистор). Передаточный коэффициент во всех случаях одинаков и для дифференциального варианта имеет вид:

$$K_{пп} = u_{оп} l_ц / h, \qquad (3)$$

где $u_{оп}$ — опорное напряжение; h — зазор между подвижными и неподвижными электродами; $l_ц$ — плечо маятника.

В качестве электрического блока в прямой цепи структурной схемы возможно применение аналогового интегратора с передаточной функцией

$$W_{инт}(s) = 1/\tau s, \qquad (4)$$

или масштабного усилителя с функцией апериодического звена

$$W_{ус}(s) = \frac{K_{ус}}{1 + \tau s}, \qquad (5)$$

где $K_{ус}$ — коэффициент усиления; τ — постоянная времени интегратора (или усилителя).

Крутизну характеристики магнитоэлектрического преобразователя силовой отработки для передаточной функции компенсационного акселерометра можно представить в следующем виде:

$$K_{о.с} = B l_в l_ц n / (R_н + r), \qquad (6)$$

где B — магнитная индукция в зазоре; $l_в$ — длина одного витка; n — число витков в обмотке датчика момента обратной связи; $R_н$ — сопротивление нагрузки выхода; r — сопротивление обмотки обратной связи.

Полная передаточная функция акселерометра в соответствии со структурной схемой и передаточными функциями отдельных звеньев может быть записана в виде:

$$W_{акс}(s) = \\ = \frac{K_{чэ} K_{пп} W_{эл}(s)}{(Js^2 + K_{ду}s + G_y) + K_{ос} K_{пп} W_{кор}(s) W_{эл}(s)}. \qquad (7)$$

В структуре полной передаточной функции (7) неизвестной является передаточная функция корректирующего устройства. При проектировании необходимо определить функцию, выполняемую корректирующим устройством таким образом, чтобы оптимизировать характеристики акселерометра.

Определим требования к корректирующему устройству исходя из естественных условий: во-первых, в статике корректирующее устройство не должно влиять на коэффициент передачи акселерометра, во-вторых, в динамике корректирующее устройство управляет скоростным демпфированием и влияет на все динамические характеристики: АЧХ, ФЧХ, переходный процесс и др.; в-третьих, корректирующее устройство не должно изменять порядка полной передаточной функции акселерометра; в-четвертых, в целях недопущения потери устойчивости акселерометра необходимо исключить насыщение интегратора. Для этого постоянная времени интегратора должна быть выполнена равной постоянной времени механической части, которая для системы второго порядка определяется в виде $\tau = (J/G_y)^{1/2}$. Естественно, что при этом сила отработки должна быть достаточной.

Определим передаточную функцию корректирующего устройства в виде классического ПД-регулятора:

$$W_{кор}(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s, \qquad (8)$$

где α_0 — коэффициент передачи пропорциональной составляющей сигнала отработки; α_1 — коэффициент передачи дифференцирующей составляющей. Интегрирующая составляющая сигнала отработки вырабатывается интегратором прямой цепи структурной схемы.

С учетом отмеченных свойств передаточную функцию корректирующего устройства перепишем в виде

$$W_{кор}(s) = 1 + Ts, \qquad (9)$$

где T — постоянная времени корректирующего устройства.

Таким образом, с учетом соотношений (3)—(9) полная передаточная функция компенсационного акселерометра с магнитоэлектрической обратной связью и интегратором в прямой цепи будет иметь вид:

$$W_{акс}(s) = \frac{K_{чэ}K_{пп}}{A_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0}, \qquad (10)$$

где $A_3 = J\tau$; $A_2 = K_{д.у}\tau$; $A_1 = (G_y\tau + K_{о.с}K_{пп}T)$; $A_0 = K_{о.с}K_{пп}$.

Если в качестве электрического блока в прямой цепи структурной схемы применить усилитель с функцией апериодического звена, то передаточная функция акселерометра будет

$$W_{акс}(s) = \frac{K_{чэ}K_{пп}K_{ус}}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \qquad (11)$$

где $a_3 = J\tau$; $a_2 = K_{д.у}\tau + J$; $a_1 = K_{д.у} + (G_y\tau + K_{о.с}K_{пп}K_{ус}T)$; $a_0 = G_у + K_{о.с}K_{пп}K_{ус}$; $K_{ус}$ — коэффициент усиления электрического звена.

Сравним теперь свободные члены характеристических полиномов для передаточных функций (10) и (11). В первом случае система является астатической. Она имеет повышенную точность, поскольку в ней исключается статическая ошибка. Тем не менее, она обладает существенным недостатком в смысле потери устойчивости при насыщении интегратора. Недостаток этот может быть устранен посредством загрубления системы. Свободный член характеристического уравнения передаточной функции (11) по сравнению со свободным членом характеристического уравнения передаточной функции (10) имеет условие робастности (1). Оптимальный режим управления маятником микросистемного акселерометра может быть получен посредством последовательного использования астатического и робастного режимов. Совместную работу двух режимов можно синхронизировать тем же тактовым генератором, который питает емкостный датчик перемещений маятника. Например, в первый полупериод выходной усилитель работает в режиме интегратора. Причем заведомо известно, что в течение этого времени усилитель не входит в насыщение за счет выбора его постоянной времени. Во второй полупериод инверсный синхросигнал открывает ключ и шунтирует емкость интегратора постоянным резистором. Интегратор сбрасывается на нуль, а выходной усилитель становится апериодическим звеном. В соответствии со структурной схемой (см. рис. 1) суммарная погрешность компенсационного микроакселерометра определяется в виде

$$\delta_\Sigma = \frac{G_у\delta_{пр}}{G_у + G_{эл}} - \frac{G_{эл}\delta_{ос}}{G_у + G_{эл}}, \qquad (12)$$

где $G_{эл} = K_{ос}K_{пп}K_{ус}$. Если жесткость механической пружины $G_у$ значительно меньше жесткости "электрической пружины", т. е. $G_у \ll G_{эл}$, то в статике коэффициенты передачи астатического и робастного режимов равны, поэтому в выходном сигнале моменты переключения с режима на режим будут незаметны. Собственная частота микроакселерометра в этих двух режимах одна и та же. Ей соответствует точка пересечения АЧХ астатического режима с точкой пересечения АЧХ робастного режима (см. приложение).

Сравним устойчивость микроакселерометра в астатическом и робастном режимах. Для астатического режима:

$$K_{д.у}(G_у\tau + K_{о.с}K_{пп}T) - JK_{о.с}K_{пп} > 0. \qquad (13)$$

Для робастного режима:

$$(K_{ду}\tau + J)(K_{ду} + (G_y\tau + K_{о.с}K_{пп}K_{ус}T)) - \\ - J\tau(G_у + K_{о.с}K_{пп}K_{ус}) > 0. \qquad (14)$$

При вакуумировании чувствительного элемента $K_{ду} = 0$. Микроакселерометр в астатическом режиме теряет устойчивость, а в робастном — нет. Робастное условие устойчивости из (14) при $K_{ду} = 0$ преобразуется к виду

$$T - \tau > 0. \qquad (15)$$

Выводы

1. Из уравнения (12) видно, что погрешность микроакселерометра при $G_у \ll G_{эл}$ в любом режиме работы определяется только погрешностью звена обратной связи.

2. Условие (15) свидетельствует о том, что микроакселерометр в робастном режиме всегда устойчив.

Список литературы

1. **Шавров А. В., Солдатов В. В.** Многокритериальное управление в условиях статистической неопределенности. М.: Машиностроение, 1990.
2. **Вавилов В. Д.** Интегральные датчики: Учебник. — Н. Новгород: НГТУ, 2003. 503 с.

Приложение. Программа для расчета АЧХ

```
> restart:
> #Accelerometr with an magnetic feedback
> #density of silicon
> rho:=2328:
> #Young's modulus in (100)
> E100:=1.295e11:
> #acceleration of gravitation
> g:=9.80665:
> #proofmass length
> am:=3.5e-3:
> #proofmass width
> bm:=3.5e-3:
> #proofmass thickness
> cm:=0.5e-3:
> #elastic gimbal springs length
> ap:=5e-4:
> #elastic spring width
> bp:=5e-4:
> #the maximal and minimal thickness of elastic spring
> cpmax:=0.5e-3:
> cpmin:=25e-6:
> #length of the proofmass shoulder
> l:=(am+ap)/2:
> #viscosity of nitrogen
> mu:=17.9e-6:
> #mu:=0:
> #proofmass weight
```

```
> m:=rho*am*bm*cm:
> #the proofmass inertia moment
> J:=m*1^2+m*(am^2+cm^2)/12:
> #the spring section inertia moment
> Jp:=(Pi*bp*cpmin^3)/64:
> #number of springs
> k:=2: q: = (cpmax-cpmin)/cpmin:
> f=3*arctan(sqrt(2*q))/(4*sqrt(2*q))+(5+6*q)/(4*(1+2*q)^2):
> #the springs angular rigidity
> Gy:=(k*E100*Jp)*f/ap:
> #air gap between the proofmass and an electrode
> h:=30e-6:
> #axial damping factor
> Kd:=2*mu*(am^3)*(bm^3)/((am^2+bm^2)*h^3):
> #angular damping factor
> Kdy:=Kd*1^2:
> #the proofmass transfer factor
> Kche:=m*l:
> #basic voltage
> Uop:=5:
> B:=0.65:
> #Number of coils of a returning winding
> n:=:8: lo:=3.5e-3:
>
> T:=evalf(sqrt(J/Gy));
                    T:=0.001376099755
> Rn:=3.33e3: C: = 1e-12: #T: = Rn*C;
> R0:=20:
> Koc:=B*lo*l*n/(Rn+R0):
> Kyc:=1:
> #angle transducer transfer factor
> Kpp:=Uop*1/h:
> #adjusting device time constant
> a3:=T*J: a2:=T*Kdy+J: al:=(Koc*Kpp* Kyc+Gy)*T+
Kdy:a0:=Gy+Koc*Kpp*Kyc:
> A3:=T*J:A2:=T*Kdy:A1:=(Koc*Kpp+Gy)*T:A0:
= Koc*Kpp:
> W:=s- > Kche*Kpp/(A3*s^3+A2*s^2+A1* s+A0);
> #transfer function
> W1:=s- > Kche*Kpp*Kyc/(a3*s^3+a2*s^2+a1* s+a0);
> #steepness of the static characteristic
> K:=evalf(abs(W(0)));
```

$$W := s \circledR \frac{Kche\,Kpp}{A3 s^3 + A2 s^2 + A1 s + A0}$$

$$W1 := s \circledR \frac{Kche\,Kpp\,Kyc}{a3 s^3 + a2 s^2 + a1 s + a0}$$

K:=2.624596154

```
> K1:=evalf(abs(W1(0)));
> achx: = plot(abs(W(I*omega))/K, omega = 0..120,title
= "the magnitude -freguency characteristic"):
> achx1: = plot(abs(W1(I*omega))/K1, omega = 0..120,
tit1e = "the magnitude -freguency characteristic"):
> plots[display]([achx,achx1]);
```

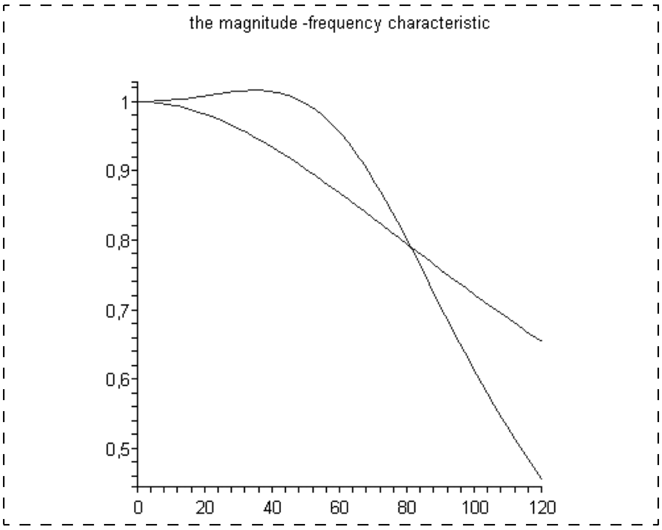


Рис. П1

```
> jmax: = Uop*Koc/Kche;
> u: = plot(K*j, j = -jmax..jmax, u, title = "The static
> characteristic"):
                    jmax: = 1.905054990
> plots[display]([u]);
```

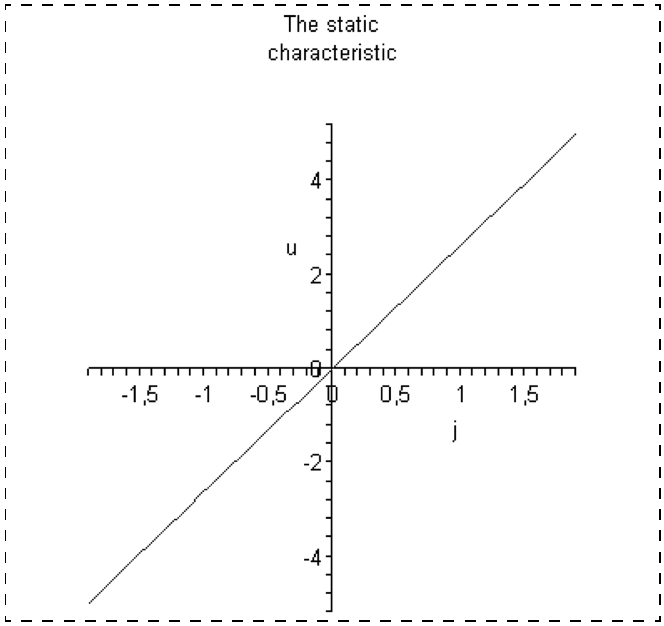


Рис. П2

```
>
> x1: = evalf(A2*A1-A3*A0):
> if x1 < 0 then print("The system is not stable") fi;
> x2: = evalf(a2*a1-a3*a0):
> if x2 < 0 then print("The system is not stable") fi;
```

УДК 621.315:539.3

С. М. Афонин, канд. техн. наук, доц., ст. науч. сотр.,
Московский государственный институт
электронной техники

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЬЕЗОАКТЮАТОРА НАНО- И МИКРОПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Исследованы гистерезисные характеристики деформации пьезоактюатора для нано- и микроперемещений, приведены экспериментальные и теоретические гистерезисные характеристики с основными и частными циклами. Получены коэффициенты гармонической линеаризации гистерезисной характеристики пьезоактюатора.

Ключевые слова: *гармоническая линеаризация, гистерезисные характеристики, основные и частные циклы, пьезоактюатор, нано- и микроперемещения, пьезоэффект.*

Использование пьезоактюатора (пьезопреобразователя, пьезодвигателя) перспективно в области нанотехнологии, микроэлектроники и астрономии для прецизионного совмещения, компенсации температурных и гравитационных деформаций, а также атмосферной турбулентности путем коррекции волнового фронта. Пьезопривод с пьезоактюатором из пьезоэлектрической керамики на основе цирконата и титаната свинца промышленных марок ЦТС или PZT обеспечивает диапазон перемещения от нанометров до десятков микрометров. Пьезоактюатор такого привода работает на основе обратного пьезоэффекта, в котором перемещение достигается за счет деформации пьезоактюатора при приложении внешнего электрического напряжения. Увеличение диапазона перемещения пьезопривода до десятков микрометров возможно в результате применения составного пьезоактюатора. Нано- и микрометрическая точность оборудования для нанотехнологии и микроэлектроники обеспечивается электромеханическими системами с нано- и микроманипуляторами, основанными на деформации исполнительного пьезоактюатора [1—5].

Наряду с преимуществами пьезоактюаторов, такими, как высокая точность, большая нагрузочная способность, широкая полоса пропускания, есть и существенный недостаток — нелинейная гистерезисная характеристика деформации пьезоактюатора, наличие которой усложняет проектирование системы управления пьезоприводом для нано- и микроперемещений. При расчете деформации пьезоактюатора необходимо учитывать его гистерезис в статических и динамических режимах работы, статический и динамический коэффициенты гистерезиса.

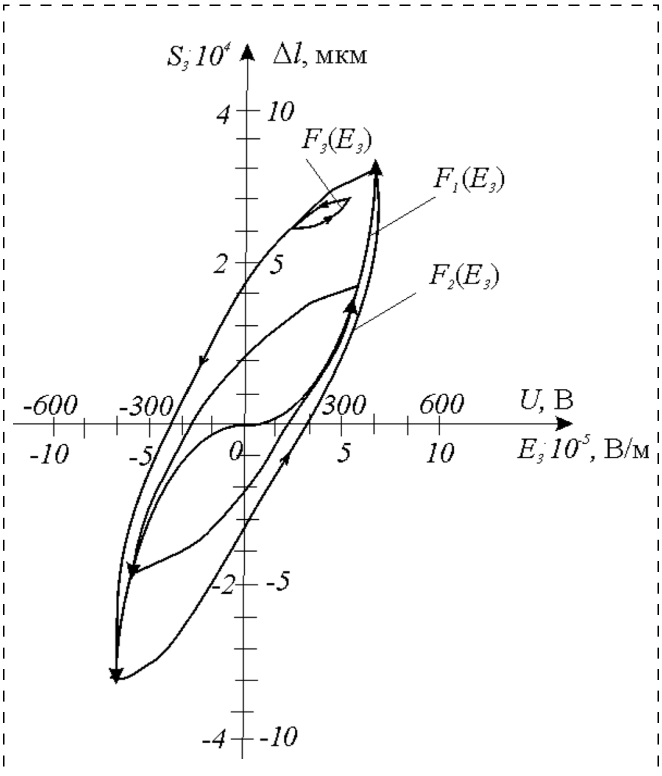


Рис. 1. Гистерезисные характеристики деформации пьезоактюатора

Рассмотрим экспериментальную статическую характеристику деформации составного пьезоактюатора (рис. 1). Измерения перемещения торца пьезоактюатора проводились с использованием измерительных электронных систем "Модель 213" и "Модель 214" завода "Калибр". На статической характеристике (рис. 1) наблюдаются начальная кривая, на которой лежат вершины основных гистерезисных циклов, основные гистерезисные петли при симметричном относительно нуля изменении напряжения на обкладках пьезоактюатора и частные циклы при несимметричном относительно нуля изменении напряжения, следовательно, имеем три функции:

$$S_3(E_3) = \begin{cases} F_1(E_3), \\ F_2(E_3), \\ F_3(E_3), \end{cases} \qquad (1)$$

где $S_3 = \Delta l/l$ — относительное перемещение пьезоактюатора по оси 3; Δl — абсолютное перемещение пьезоактюатора; $F_1(E_3)$ — функция, описывающая начальную кривую; $F_2(E_3)$ — функция, описывающая основную гистерезисную петлю; $F_3(E_3)$ — функция, описывающая частный цикл; $E_3 = U/\delta$ — напряженность электрического поля по оси 3; U — напряжение на обкладках пьезоактюатора; δ — толщина пьезопластины.

С использованием метода наименьших квадратов получаем для функции $F_1(E_3)$ (см. рис. 1) в выражении (1) следующий аппроксимирующий степенной полином, ограничившись первыми тремя нечетными членами:

$$F_1(E_3) = d_{33}^0 E_3 + a_{33} E_3^3 + b_{33} E_3^5, \quad (2)$$

где d_{33}^0 — начальное значение пьезомодуля; a_{33}, b_{33} — коэффициенты степенного полинома. При d_{33}^0 = 0,4 нм/В, a_{33} = $3{,}1 \cdot 10^{-22}$ м^3/В^3, $b_{33} = -5 \cdot 10^{-35}$ м^5/В^5 для пьезоактюатора из пьезокерамики марки ЦТС- 19 относительное среднее квадратичное отклонение аппроксимирующей кривой от экспериментальной не превышает 5 %. Аналогично с использованием метода наименьших квадратов получаем функцию $F_2(E_3)$, описывающую основной цикл [5] (см. рис. 1) при продольном пьезоэффекте и симметричном относительно нуля изменении напряжения на электродах пьезоактюатора с учетом сухого трения при перемещении доменных границ в сегнетоэлектрике, в виде

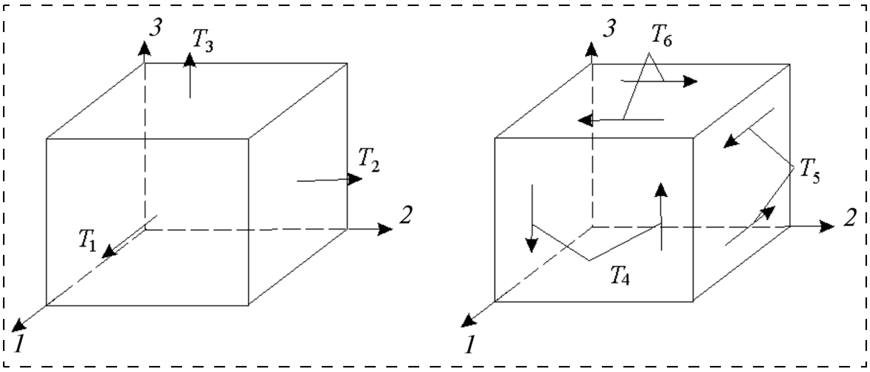


Рис. 2. Напряженное состояние в пьезоактюаторе

$$S_3 = d_{33}E_3 - \gamma_{33}^0 E_{3m}(1 - E_3^2/E_{3m}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_3; \quad (3)$$

$$d_{33} = (d_{33}^0 E_{3m} + a_{33} E_{3m}^3 + b_{33} E_{3m}^5)/E_{3m} = S_{3m}/E_{3m},$$

где d_{33} — продольный пьезомодуль; E_{3m} — амплитуда напряженности электрического поля; S_{3m} — максимальная относительная деформация при $E_3 = E_{3m}$; $\gamma_{33}^0 = S_3^0/E_{3m}$ — статический коэффициент гистерезиса; S_3^0 — остаточная относительная величина статической характеристики при $E_3 = 0$; n = 1, 2, 3, 4... — степенной коэффициент, определяемый формой гистерезисной кривой; $\dot{E}_3$ — скорость изменения напряженности электрического поля оси 3. Уточним при продольном пьезоэффекте описание основной гистерезисной петли деформации пьезоактюатора с учетом ее расширения в динамике вследствие вязкого трения при перемещении доменных границ, которое пропорционально модулю скорости изменения электрического поля

$$S_3 = d_{33}E_3 - \gamma_{33}E_{3m}(1 - E_3^2/E_{3m}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_3, \quad (4)$$

где $\gamma_{33} = \gamma_{33}^0\left(1 + k_\gamma\left|\dot{E}_3\right|\right)$ — динамический коэффициент гистерезиса; γ_{33}^0 — статический коэффициент гистерезиса; k_γ — коэффициент вязкого трения при перемещении доменных границ в сегнетоэлектрике; $\left|\dot{E}_3\right|$ — модуль скорости изменения напряженности электрического поля по оси 3.

Выражения для гистерезисной петли в статике (3) и динамике (4) аналогичны, причем в динамике при описании гистерезисной петли статический коэффициент гистерезиса заменен динамическим коэффициентом гистерезиса. Замена коэффициентов осуществляется в рабочем частотном диапазоне для пьезокерамики марок ЦТС или PZT до 1 кГц, т. е. до насыщения коэффициента гистерезиса, когда происходит увеличение динамического коэффициента гистерезиса по сравнению со статическим коэффициентом гистерезиса в 1,5 раза.

После преобразования динамический коэффициент гистерезиса принимает вид

$$\gamma_{33} = \gamma_{33}^0(1 + k_\gamma\ \dot{E}_3 \operatorname{sign}\dot{E}_3). \quad (5)$$

Соответственно получаем следующее выражение для основной гистерезисной петли деформации пьезоактюатора при продольном пьезоэффекте с учетом сухого и вязкого трения:

$$S_3 = d_{33}E_3 - \gamma_{33}^0 E_{3m}(1 - E_3^2/E_{3m}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_3 - \\ - \gamma_{33}^0 k_\gamma \dot{E}_3 E_{3m}(1 - E_3^2/E_{3m}^2)^n. \quad (6)$$

Обобщенное уравнение пьезоэффекта [1, 3, 4] при управлении по напряжению с учетом компонент механических напряжений пьезоактюатора по соответствующим осям (рис. 2) и свойств симметрии поляризованной сегнетокерамики типа ЦТС или PZT записывается в виде

$$S_j = d_{ij}E_i + s_{jk}^E T_k, \quad (7)$$

где индексы j = 1, 2, ..., 6; k = 1, 2, ..., 6; i = 1, 2, 3; $S_j = S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ — относительные деформации пьезоактюатора; $d_{ij} = d_{15}, d_{31}, d_{33}$ — пьезомодули; $E_i = E_1, E_2, E_3$ — напряженности электрического поля в пьезоактюаторе; $s_{jk}^E = s_{11}^E$, s_{12}^E; s_{13}^E; s_{33}^E, s_{55}^E — упругие податливости; $T_k = T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ — механические напряжения. Соответственно с учетом симметрии электромеханических характеристик сегнетокерамики имеем $d_{31} = d_{32}$ и $s_{55}^E = s_{44}^E$.

Уточним при рассмотрении гистерезиса первое слагаемое в выражении (7), соответствующее обратному пьезоэффекту. На основе экспериментальных данных и выражений (3) и (7) аналитическое описание обобщенной основной гистерезисной петли (рис. 3) пьезоактюатора с учетом сухого трения получаем в виде

$$S_j = d_{ij}E_i - \gamma_{ij}^0 E_{im}(1 - E_i^2/E_{im}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_i, \qquad (8)$$

где d_{ij} — пьезомодуль; E_i — напряженность электрического поля; E_{im} — амплитуда напряженности электрического поля; $\dot{E}_i$ — скорость изменения напряженности электрического поля по оси i; γ_{ij}^0 — статический коэффициент гистерезиса.

Аналогично получаем описание основной гистерезисной петли деформации пьезоактюатора с учетом ее расширения в динамике вследствие вязкого трения при перемещении доменных границ в сегнетоэлектрике:

$$S_j = d_{ij}E_i - \gamma_{ij}E_{im}(1 - E_i^2/E_{im}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_i, \qquad (9)$$

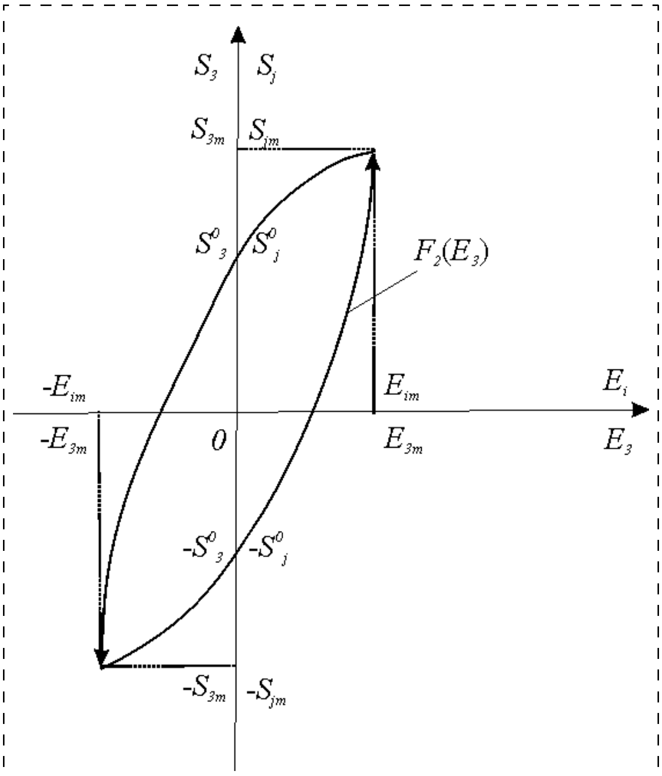


Рис. 3. Основной цикл гистерезисной характеристики деформации пьезоактюатора

где $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0(1 + k_\gamma|\dot{E}_i|)$ — динамический коэффициент гистерезиса; k_γ — коэффициент вязкого трения; $|\dot{E}_i|$ — модуль скорости изменения напряженности электрического поля по оси i.

Динамический коэффициент гистерезиса принимает вид

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0(1 + k_\gamma \dot{E}_i \operatorname{sign}\dot{E}_i). \qquad (10)$$

Следовательно, получаем следующее выражение для основной гистерезисной петли деформации с учетом сухого и вязкого трения при перемещении доменных границ в сегнетоэлектрике:

$$S_j = d_{ij}E_i - \gamma_{ij}^0 E_{im}(1 - E_i/E_{im}^2)^n \operatorname{sign}\dot{E}_i -$$
$$- \gamma_{ij}^0 k_\gamma, \dot{E}_i E_{im}(1 - E_i^2/E_{im}^2)^n. \qquad (11)$$

Соответственно, параметрическую структурную схему пьезоактюатора [2, 3] уточняем путем замены линейного звена $S_j = d_{ij}E_i$ на нелинейное звено $S_j = F(E_i)$. При несимметричном относительно нуля изменении напряжения на электродах пьезоактюатора в статических характеристиках (см. рис. 1) наблюдаются частные циклы. В основе образования основных и частных циклов лежит доменная переориентация в сегнетокерамике. По аналогии с аппроксимацией основного цикла (3) с учетом сухого трения при продольном пьезоэффекте получаем аппроксимацию частного цикла $F_3(E_3)$ (рис. 4) в виде следующего выражения:

$$S_3 = S_{3b} + d_{33}(E_3 - E_{3b}) -$$
$$- \gamma_{33}^0 E_{3m}\{1 - [E_3 - (E_{3b} + E_{3m})]^2/E_{3m}^2\}^n \operatorname{sign}\dot{E}_3, \qquad (12)$$
$$d_{33} = (S_{3t} - S_{3b})/(2E_{3m}),$$

где d_{33} — продольный пьезомодуль; S_{3b} — относительная деформация пьезоактюатора в начальной точке частного цикла; S_{3t} — относительная деформация пьезоактюатора в вершине частного цикла; E_{3m} — амплитуда или половинный размах напряженности электрического поля; E_{3b} — напряженность электрического поля в начальной точке частного цикла.

Среднее квадратичное отклонение аппроксимирующих кривых от экспериментальных основного и частного циклов составляет 5 %. При $E_{3b} = -E_{3m}$ и $S_{3b} = -d_{33}E_{3m}$ частный цикл преобразуется в основной цикл. Соответственно с учетом выражения (8) получаем с учетом сухого трения аппроксимацию

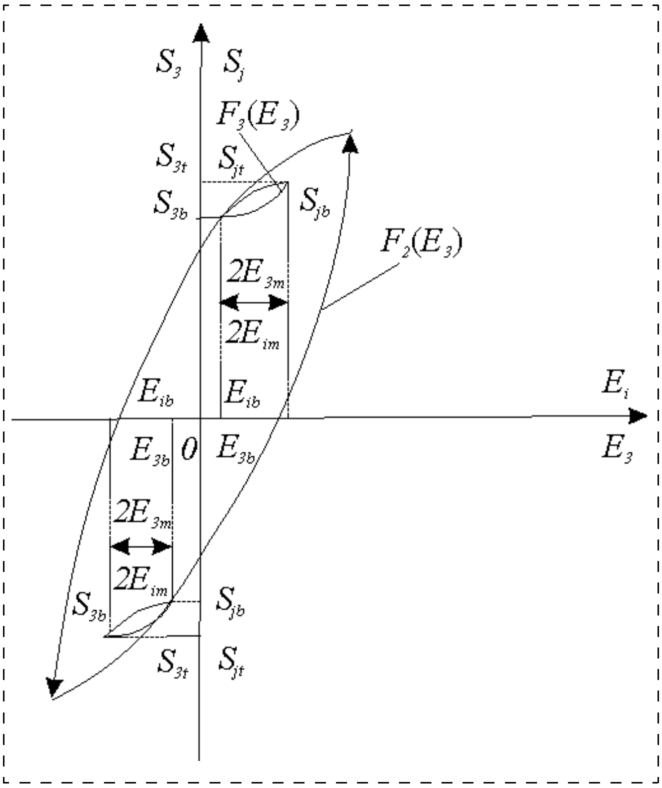


Рис. 4. Частные циклы гистерезисной характеристики деформации пьезоактюатора

обобщенного частного цикла (см. рис. 4) в виде следующего выражения:

$$S_j = S_{jb} + d_{ij}(E_i - E_{ib}) -$$
$$\gamma_{ij}^0 E_{im}\{1 - [E_i - (E_{ib} + E_{im})]^2/ E_{im}^2\}^n \operatorname{sign} \dot{E}_i, \quad (13)$$

$$d_{ij} = (S_{jt} - S_{ib})/(2E_{im}),$$

где d_{ij} — пьезомодуль; S_{jb} — относительная деформация пьезоактюатора в начальной точке частного цикла; E_{ib} — напряженность электрического поля в начальной точке частного цикла; S_{jt} — относительная деформация пьезоактюатора в вершине частного цикла; E_{im} — амплитуда или половинный размах напряженности электрического поля.

При $E_{ib} = -E_{im}$ и $S_{jb} = -d_{ij}E_{im}$ частный цикл преобразуется в основной цикл. Аналогично с учетом динамического коэффициента гистерезиса записываем следующее выражение при продольном пьезоэффекте для частного цикла деформации пьезоактюатора с учетом сухого и вязкого трения:

$$S_3 = S_{3b} + d_{33}(E_3 - E_{3b}) -$$
$$- \gamma_{33}E_{3m}\{1 - [E_3 - (E_{3b} + E_{3m})]^2/ E_{3m}^2\}^n \operatorname{sign} \dot{E}_3. \quad (14)$$

Следовательно, имеем выражение для обобщенного частного цикла деформации пьезоактюатора с учетом сухого и вязкого трения

$$S_j = S_{jb} + d_{ij}(E_i - E_{ib}) -$$
$$- \gamma_{ij}E_{im}\{1 - [E_i - (E_{ib} + E_{im})]^2/ E_{im}^2\}^n \operatorname{sign} \dot{E}_i. \quad (15)$$

При гармонической линеаризации [6—8] для основного гистерезисного цикла пьезоактюатора при продольном пьезоэффекте (см. рис. 1) имеем следующее выражение:

$$S_3(E_{3m}) = [q_{33}(E_{3m}) + q'_{33}(E_{3m})p/\omega]E_3(E_{3m}), \quad (16)$$

где p — оператор Лапласа; ω — частота. Из выражения (16) получим передаточную функцию нелинейного звена с гистерезисной характеристикой в виде основного гистерезисного цикла для составного пьезоактюатора при продольном пьезоэффекте в виде

$$W_{33_g}(E_{3m}) = S_3(E_{3m})/E_3(E_{3m}) =$$
$$= q_{33}(E_{3m}) + jq'_{33}(E_{3m}), \quad (17)$$

где j — мнимая единица. Соответственно в выражении (17) рассчитываем коэффициенты гармонической линеаризации при продольном пьезоэффекте:

$$q_{33}(E_{3m}) = \frac{1}{\pi E_{3m}} \int_0^{2\pi} S_3(E_{3m}\sin\psi)\sin\psi d\psi, \quad (18)$$

$$q'_{33}(E_{3m}) = \frac{1}{\pi E_{3m}} \int_0^{2\pi} S_3(E_{3m}\sin\psi)\cos\psi d\psi.$$

Следовательно, для пьезокерамики марок ЦТС или PZT из выражений основной гистерезисной петли при $n = 1$ из выражений (3), (4), (18) получаем следующие выражения для коэффициентов гармонической линеаризации при продольном пьезоэффекте:

$$q_{33}(E_{3m}) =$$
$$= \frac{1}{\pi E_{3m}} \int_0^{2\pi} [d_{33}E_{3m}\sin\psi - \gamma_{33}E_{3m}(1 - \sin^2 \psi)\operatorname{sign} \dot{E}_3]\times$$
$$\times \sin\psi d\psi = d_{33}; \quad (19)$$

$$q'_{33}(E_{3m}) =$$
$$= \frac{1}{\pi E_{3m}} \int_0^{2\pi} [d_{33}E_{3m}\sin\psi - \gamma_{33}E_{3m}(1 - \sin^2\psi)\operatorname{sign} \dot{E}_3] \times$$
$$\times \cos\psi d\psi = -\frac{8\gamma_{33}}{3\pi}.$$

Так как для пьезоактюатора из пьезокерамики марок ЦТС или PZT начальная кривая $F_1(E_3)$, на которой (см. рис. 1) лежат основные гистерезисные петли $F_2(E_3)$, имеет вид степенной функции с нечетными степенями аргумента, то с использованием метода наименьших квадратов получаем с погрешностью менее 5 % для функции S_3 при продольном пьезоэффекте аппроксимирующий степенной полином (2), ограничившись первыми тремя нечетными членами степенного ряда. Следовательно, пьезомодуль при продольном пьезоэффекте равен

$$q_{33}(E_{3m}) = d_{33}(E_{3m}) = d_{33}^0 + a_{33}E_{3m}^2 + b_{33}E_{3m}^4. \tag{20}$$

Аналогично (16) находим следующее обобщенное выражение:

$$S_j(E_{im}) = [q_{ij}(E_{im}) + q'_{ij}(E_{im})p/\omega]E_i(E_{im}). \tag{21}$$

Из этого выражения определяем обобщенную частотную передаточную функцию нелинейного звена с гистерезисной характеристикой деформации в виде основного гистерезисного цикла:

$$W_{ij_g}(E_{im}) = S_j(E_{im})/E_i(E_{im}) = q_{ij}(E_{im}) + jq'_{ij}(E_{im}). \tag{22}$$

Следовательно, для функции (22) имеем коэффициенты гармонической линеаризации

$$q_{ij}(E_{im}) = \frac{1}{\pi E_{im}}\int_0^{2\pi} S_j(E_{im}\sin\psi)\sin\psi d\psi, \tag{23}$$

$$q'_{ij}(E_{im}) = \frac{1}{\pi E_{im}}\int_0^{2\pi} S_j(E_{im}\sin\psi)\cos\psi d\psi.$$

Для пьезоактюатора из пьезокерамики марок ЦТС или PZT $n = 1$ из выражений основного цикла (см. рис. 3) (8), (9), (23) имеем следующий вид коэффициентов гармонической линеаризации:

$$q_{ij}(E_{im}) = \frac{1}{\pi E_{im}}\int_0^{2\pi}[d_{ij}E_{im}\sin\psi - \gamma_{ij}E_{im}(1 - \sin^2\psi)\text{sign } \dot{E}_i]\sin\psi d\psi = d_{ij};$$

$$q'_{ij}(E_{im}) = \frac{1}{\pi E_{im}}\int_0^{2\pi}[d_{ij}E_{im}\sin\psi - \gamma_{ij}E_{im}(1 - \sin^2\psi)\text{sign } \dot{E}_i] \times \cos\psi d\psi = -\frac{4\cdot 2\gamma_{ij}}{\pi 3} = -\frac{8\gamma_{ij}}{3\pi}, \tag{24}$$

$$d_{ij}(E_{im}) = q_{ij}(E_{im}) = d_{ij}^0 + a_{ij}E_{im}^2 + b_{ij}E_{im}^4.$$

Определим коэффициенты гармонической линеаризации для пьезоактюаторов из различных марок пьезокерамики с учетом различных степенных коэффициентов n — целых чисел:

для $n = 2$

$$q_{ij}(E_{im}) = d_{ij},\ q'_{ij}(E_{im}) = -\frac{4\cdot 2\cdot 4\gamma_{ij}}{\pi 3\cdot 5} = -\frac{32\gamma_{ij}}{15\pi}, \tag{25}$$

для $n = 3$

$$q_{ij}(E_{im}) = d_{ij},\ q'_{ij}(E_{im}) = -\frac{4\cdot 2\cdot 4\cdot 6\gamma_{ij}}{\pi 3\cdot 5\cdot 7} = -\frac{192\gamma_{ij}}{105\pi}. \tag{26}$$

С учетом выражений (24)—(26), переходя от n к $n + 1$, определяем соотношения для коэффициентов гармонической линеаризации обобщенной основной гистерезисной петли:

$$q_{ij}(E_{im}) = d_{ij},\ q'_{ij_n}(E_{im}) = \frac{2n}{2n+1}\,q'_{ij_{n-1}}(E_{im}). \tag{27}$$

Соответственно

$$q'_{ij_n}(E_{im}) = -\frac{4\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n\gamma_{ij}}{\pi 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \tag{28}$$

Гистерезисные характеристики перемещения биморфных и мультиморфных пьезоактюаторов из пьезокерамики марок ЦТС или PZT имеют вид, аналогичный рассмотренным гистерезисным характеристикам простых и составных пьезоактюаторов, следовательно, аналогичны выражения для коэффициентов гармонической линеаризации.

Рассмотрим в обобщенном виде замкнутую систему управления деформацией пьезоактюатора [4—11] с нелинейным гистерезисным элементом и линейной частью системы. Передаточная функция линейной части системы $W_{ij_l}(p)$ при упругоинерционной нагрузке

$$W_{ij_l}(p) = \frac{k_l}{T_t^2p^2 + 2T_t\xi_tp + 1}, \tag{29}$$

где k_l — коэффициент передачи линейной части; T_t, ξ_t — постоянная времени и коэффициент затухания колебательного звена линейной части системы управления деформацией пьезоактюатора; p — оператор Лапласа. Для системы управления деформацией пьезоактюатора записываем условие [6] существования автоколебаний

$$1 + W_{ij_l}(j\Omega)W_{ij_g}(E_{im}) = 0, \tag{30}$$

где $W_{ij_g}(E_{im})$ — передаточная функция нелинейного гистерезисного элемента; j — мнимая единица; Ω — частота автоколебаний; E_{im} — амплитуда автоколебаний напряженности электрического поля по оси i.

Условие существования автоколебаний [6] — критерий Гольдфарба

$$W_{ij_l}(j\Omega) = -\frac{1}{W_{ij_g}(E_{im})}. \qquad (31)$$

С учетом полученных коэффициентов гармонической линеаризации (22) для гистерезисной характеристики пьезоактюатора из условия (31) определяем условие существования автоколебаний для системы управления деформацией пьезоактюатора в следующем виде:

$$\frac{1}{\frac{1-T_t^2\Omega^2}{k_l}+j\frac{2T_t\xi_t\Omega}{k_l}} = \frac{1}{-(d_{ij}^0+a_{ij}E_{im}^2+b_{ij}E_{im}^4)+j\frac{8\gamma_{ij}}{3\pi}}.$$

Откуда находим два уравнения для мнимых и вещественных частей для определения частоты Ω и амплитуды E_{im} автоколебаний. В системе управления деформацией пьезоактюатора из пьезокерамики ЦТС-19 с продольным пьезоэффектом для оптического дефлектора [9] при $k_l = 3{,}13 \cdot 10^8$ В/м; $T_t = 10^{-3}$ с; $\xi_t = 10^{-2}$; $d_{33}^0 = 4 \cdot 10^{-10}$ м/В; $a_{33} = 3{,}1 \cdot 10^{-22}$ м^3/В^3; $b_{33} = -5 \cdot 10^{-35}$ м^5/В^5; $\gamma_{33} = 0{,}8 \cdot 10^{-10}$ м/В частота автоколебаний $\Omega = 4\gamma_{33}k_l/(3\pi T_t \xi_t) = 1060$ с$^{-1}$ и амплитуда автоколебаний $E_{3m} = 2{,}3 \cdot 10^5$ В/м с погрешностью 5 %.

В ряде систем управления деформацией пьезоактюатора в микроэлектронике, нанотехнологии, адаптивной оптике автоколебания недопустимы, следовательно, необходимо вводить в систему корректирующее устройство компенсации гистерезиса или корректирующее устройство, надлежащим образом деформирующее амплитудную частотную характеристику линейной части системы, для обеспечения устойчивости системы управления деформацией.

Список литературы

1. **Акопьян В. А., Панич А. Е., Соловьев А. Н., Шевцов С. Н.** Некоторые физико-механические проблемы пьезоэлектрических актюаторов и области их применения // Нано- и микросистемная техника. 2006. № 10. С. 35—40.
2. **Афонин С. М.** Пьезопреобразователи для приводов микроперемещений // Приборы и системы управления. 1998. № 2. С. 41—42.
3. **Афонин С. М.** Обобщенная структурно-параметрическая модель электромагнитоупругого преобразователя для систем управления нано- и микроперемещениями. III. Трансформация параметрических структурных схем электромагнитоупругого преобразователя для систем управления нано- и микроперемещениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 2. С. 158—166.
4. **Афонин С. М.** Обобщенная структурно-параметрическая модель электромагнитоупругого преобразователя для систем управления нано- и микроперемещениями. II. Об обобщенной структурно-параметрической модели составного электромагнитоупругого преобразователя // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 108—111.
5. **Афонин С. М.** Абсолютная устойчивость системы управления деформацией пьезопреобразователя // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 2. С. 112—119.
6. **Бабаков Н. А., Воронов А. А., Воронова А. А.** и др. Теория автоматического управления. Ч. 2 Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. А. А. Воронова. М.: Высш. шк., 1977. 288 с.
7. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического регулирования. М.: Профессия, 2004. 752 с.
8. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 363 с.
9. **Ребрин Ю. К.** Управление оптическим лучом в пространстве. М.: Сов. радио, 1977. 336 с.
10. **Drexler K. E.** Nanosystems: Molecular Machinery, Manufacturing, and Computation. New York: John Wiley & Sons Inc., 1992. 560 p.
11. **Вардан В., Виной К., Джозе К.** ВЧ МЭМС и их применение. М.: Техносфера, 2004. 528 с.

CONTENTS

Angular distribution of energy and velocity of photoelectrons is investigated at an internal photoeffect for two variants: the quantum of light shows basically wave properties and basically corpuscular properties at interaction with orbital electron. Distinction in angular distribution of photoelectrons for these variants is shown. Angular distribution in the second variant is investigated for not relativistic and relativistic cases.

Keywords: electron, photon, quantum interaction, metallic film.

The methods and the results of calculation of thermal process were presented for micro-motors designed on the basic of multilayer glass-fiber microstructures.

Keywords: mathematical modeling, finite element method, thermal modes, micro-motors, glass-fiber technology.

The analysis of problems of agreement of current-voltage characteristics calculation results of RTD based on known models with the experimental data has led to a conclusion about necessity of development of model for particular system (systems) of materials. It is shown, that the proposed combined two-band model can be used for the satisfactory agreement with experimental data on I-V characteristics RTD based on GaAs/AlAs.

Keywords: the resonant tunneling diode, intervalley scattering, combined two-band model.

The creation of miniaturised power cell using direct energy conversion effect with nickel-63 isotope as active element is discussed. The cell has a specific electric power at least 0,05 mW/cm^3, output voltage 3V with about 30 years lifespan. Industrial technology of nickel-63 isotope production is proposed with using only Russian resources and technology equipments.

Keywords: energy conversion effect, power cell, silicon converter, nickel-63.

A system of the differential equations which describes the influence of the temperature on the bend of a long rectangular many-layer plate is obtained. This made possible the investigation of the temperature dependence of deflections, deformations, mechanical stresses under various conditions at the edges of the plate. Exact solutions of the system of the differential equations were obtained for rigidly jammed plate edges and for the plate freely rest on the bottom surface. The good agreement was found between our theoretical results and results in a literature.

Keywords: long composite rectangular plate, temperature-deflection, deformation, stress.

The aim of this research was the approbation of the method of the sedimentation yttrium oxide's dielectric at the porous surface of an anode condenser foil by the thermal decomposition of the yttrium organic salt. The samples of the etched aluminium foil KDK (Japan) with dielectric yttrium oxide's films which have different thickness and structure have been made. Capacitance characteristics of this samples have been measured, impact assessment of thickness and structure of dielectric film under it's dielectric properties has been studied. Also was studied the substructure of produced films by the methods of transmission electronic microscopy.

Keywords: electrolytic capacitor, dielectric thin film, electric capacitance, operating voltage, porous anode condenser foil.

The soldering temperature makes the greatest impact on quality connections. Thus, development of a scientific direction for the hot gas soldering of electronic devices is of great importance.

Keywords: the device, assemblage, MST, quality, the soldering, temperature.

Behaviour of the effective hydrostatic piezoelectric coefficients d_h^* and g_h^*, squared figure of merit $(Q_h^*)^2$ and electromechanical coupling factor k_h^* has been analysed for the 1-3-type relaxor-ferroelectric single crystal/auxetic polymer composites on changing microgeometry and properties of the porous matrix. A correlation between max $X_h^* / X_h^{(1)}$ and a ratio of elastic compliances of the porous matrix $s_{33}^{(2)} / s_{11}^{(2)}$ has been stated for a composite based on the single crystal poled along [001] of the perovskite unit cell, where $X_h^{(1)}$ denotes the hydrostatic parameter of the single crystal. Advantages of the novel 1-3-type composites are discussed.

Keywords: piezo-active 1-3-type composite, hydrostatic parameters, relaxor-ferroelectric single crystal, porous polymer, elastic properties.

Boundary problem decision is obtained and derivations of statistical fitches of boundary acoustic field scattered by rough plane absolute soft surface calculated of the integral equation method approach is given. Irregularities of surface are supposed coarse and smooth.

Keywords: boundary problem, method of Kirhgoff, integral equation method, radius of correlation of irregularities, variance of boundary field.

One of the actual problems of the up-to-date instrument engineering is development of the motion parameters measurers such as linea/angular accelerometers as well as angle transducers/angular sensors. These measurers operate in severe conditions including load factors and shocks during the take-off and landing. Under extremal conditions the measurers are provided with robustness capability that means desensitization to non-informational parameters.

Keywords: robust, block diagram, MEMS-accelerometer, unit, proofmass, spring, feedback, transfer function, frequency response, natural frequency.

Hysteresis characteristics of deformation piezoactuators are proposed. Basic and local loops for hysteresis deformation characteristics of a compound piezoactuator are proposed. Transfer functions of a nonlinear links with a loop characteristics are found for a piezoactuator of longitudinal, and cross and shear piezoeffect. Coefficients of harmonious linearization are received for loop characteristics of piezoeffect for calculation of a systems of automatic control of piezoactuator for nano- and micrometric movement.

Keywords: harmonious linearization, hysteresis characteristics, basic and local loops, piezoactuator, nano- and micrometric movement, piezoeffect.

For foreign subscribers:

Journal of "NANO and MICROSYSTEM TECHNIQUE" (Nano- i mikrosistemnaya tekhnika, ISSN 1813-8586)

The journal bought since november 1999.
Editor-in-Chief Ph. D. Petr P. Maltsev
ISSN 1813-8586.
Address is: 4, Stromynsky Lane, Moscow, 107076, Russia. Tel./Fax: +7(499) 269-5510.
E-mail: nmst@novtex.ru; http://www.microsystems.ru

Адрес редакции журнала: 107076, Москва, Стромынский пер., 4. Телефон редакции журнала **(499) 269-5510. E-mail: nmst@novtex.ru**
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору за соблюдением законодательства
в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-18289 от 06.09.04.

Дизайнер *Т. Н. Погорелова.* Технический редактор *Е. М. Патрушева.* Корректор *Л. М. Мазурина*

Сдано в набор 19.01.2009. Подписано в печать 20.02.2009. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,86 Уч.-изд. л. 7,98. Заказ 140. Цена договорная

Отпечатано в ООО "Подольская Периодика", 142110, Московская обл., г. Подольск, ул. Кирова, 15