

Джонса к оптическим интегральным устройствам [Belea A. J. Optics (Paris), 1992. Vol. 23. N 1. P. 19—26].

Список литературы

1. Валиев К. А., Раков А. В. Физические основы субмикронной литографии в микроэлектронике. М.: Радио и связь, 1984.
2. Аззам Р., Башара Н. Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981. 581 с.
3. Ayazi F., Najafi K. High aspect ratio polysilicon micromachining technology // Sensors & Actuators. 2000. V. 87. P. 46—51.
4. McNie M., King D., Vizard C., Holmes A., Lee K. W. High aspect ratio micromachining (HARM) technologies // Microsystem technologies. 2000. V. 6. P. 184—188.
5. Kupka R. K., Bouamrane F., Cremers C., Megtert S. Microfabrication: X-LIGA and application // Appl. Surf. Sci. 2000. V. 164. P. 97—100.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Наука, 1972.
7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика М.: Наука, 1980.
8. Goodman J. W. Introduction to Fourier Optics / VcGraw-Hill. N.-Y., 1996.
9. Хинчин Спектры и анализ М.: Наука, 19
10. Yee G. V., Maluf N. I., Albin M., Kovacs G. T. A. Miniature spectrometers for biochemical analysis // Sensor&Actuators A. 1997. V. 58. P. 61—66.
11. Kong S. H., Wijngards D. D. L., Wolfenbittel R. F. Infrared micro-spectrometer based on a diffraction grating // Sensor&Actuators. 2001. V. A 92. P. 88—95.
12. Cooper E. R., Post E. R., Griffith S., Levitan J., Mandis S. D., Quate C. F. Interferometrical accelerometer with high resolution // Applied Physics Letters. 2000. V. 22. N 22. P. 3316—3318.
13. Madou M. J. Fundamentals of Microfabrication: the Science of Miniaturization. CRS Press. 2001.

УДК 512.628.2

Е. В. Новожилов,
Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики
и Кибернетики

О ПРИВЕДЕНИИ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Рассматриваются системы линейных дифференциально-алгебраических уравнений с переменными коэффициентами, удовлетворяющими специальным условиям постоянства ранга. Системы данного типа возникают, в частности, при решении таких прикладных задач, как моделирование электронных цепей, химических реакций (определенного типа), а также задачи расчета динамики различных транспортных систем (в том числе на макроуровне). Предлагается метод приведения таких систем к определенной простейшей форме, основанный на построении итерационной процедуры. Предложенный метод применим для систем с любым значением индекса и может быть использован для численного решения дифференциально-алгебраических систем при моделировании процессов в перечисленных прикладных задачах.

Введение

В современных методах расчета моделируемых электронных цепей [1]—[3] наиболее часто используется метод узлового анализа зарядов [4], [5]. Однако такой метод имеет один существенный недостаток: коэффициенты возникающих при этом

дифференциально-алгебраических уравнений обременены недостаточной гладкостью. Индекс¹ таких систем может быть равен 2 и при этом системы могут не иметь нормальной формы Хессенберга (Hessenberg F.) [6]. Метод узлового анализа зарядов электронных цепей приводит к системам вида

$$\begin{aligned} A\dot{q} + f(x) &= r(t); \\ q - g(x) &= 0, \end{aligned}$$

где вектор неизвестной функции (x, q) содержит:

- потенциал u узлов цепи;
- силу тока I элементов цепи с управляемым напряжением;
- заряд конденсаторов Q ;
- магнитный поток Φ катушек индуктивности.

Предполагаем, что электронная цепь содержит динамические элементы: элементы емкостного сопротивления (конденсаторы) и катушки индуктивности. Для примера рассмотрим модель электронной цепи одного из наиболее распространенных элементов в интегральных схемах — логического элемента "И—НЕ" (NAND-gate).

Пример

Элемент "И—НЕ" состоит из двух обогащенных МОП-транзисторов с каналом n -типа (ME), одного ослабленного (обедненного) МОП-транзистора с каналом n -типа (MD) и заряженного конденсатора (C) (рис. 1). МОП-схемы, как правило, не содержат других элементов кроме МОП-транзисторов,

¹Число последовательных операций дифференцирования для сведения к простейшей форме.

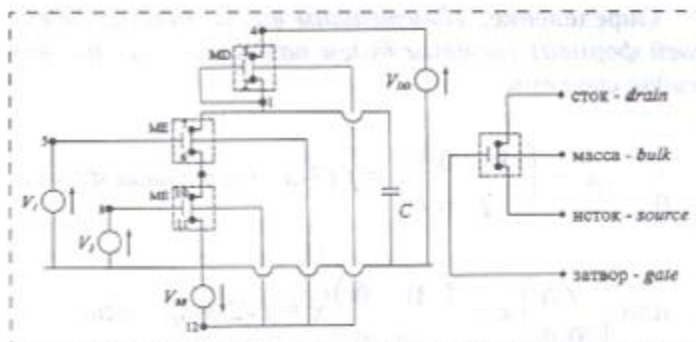


Рис. 1. Элемент "И-НЕ" и схема МОП-транзистора

которые могут также выполнять функцию управляемых резисторов. В нашем примере таковым является обедненный МОП-транзистор (MD), для этой цели в его схеме соединены затвор и исток.

Напряжение на стоке d (drain) транзистора MD равно $V_{DD} = 5$ В. Массы b (bulk) транзисторов не заземлены и $V_{BB} = -2,5$ В. Истоки s (source) обоих транзисторов ME заземлены, напряжение на их затворах g (gate) соответственно равно V_1 и V_2 . Более подробная (точнее отражающая физическую структуру) схема МОП-транзистора дана в работе [5]. При расчете этой модели будет получена система с индексом 2.

Работу транзистора в соответствии с приведенной схемой можно описать так. Ток i_{ds} может протекать от стока к истоку тогда и только тогда, когда управляющее напряжение U_{gs} между затвором и истоком больше, чем пороговое напряжение (значение которого зависит от конкретной применяемой технологии) U_T . Затвор изолирован от канала сток—исток тонким слоем двуоксида кремния (SiO_2); т. е. сопротивление R_{sd} между истоком и стоком почти "бесконечно" большая величина ($\sim 10^{15}$ Ом).

При использовании метода узлового анализа зарядов в результате расчета получаем системы дифференциально-алгебраических уравнений с размерностью коэффициентов 29×29 (эту систему можно получить, если записать закон Кирхгофа для каждого из двенадцати узлов, обозначенных на схеме элемента). Не будем выписывать здесь все уравнения системы (система полностью приведена и рассмотрена в работе [1]), запишем только по одному уравнению (в качестве типового) из трех основных частей системы.

1. Дифференциальная часть системы — 12 уравнений для значений зарядов; одно из уравнений дифференциальной части имеет вид:

$$-\dot{Q}_{lgs} - \dot{Q}_{lbs} + \frac{u_2 - u_1}{R_s} + \frac{u_2 - u_3}{R_{sd}} + i_{ds}^D(u_3 - u_2, u_1 - u_2, u_{12} - u_2) = 0.$$

2. Четыре характеристических уравнения для напряжений истоков типа

$$u_{12} - V_{BB} = 0.$$

3. Для емкостей — 13 характеристических уравнений типа

$$Q_{lgs} - q_{gs}(u_1 - u_2) = 0.$$

В результате моделирования с использованием, например, метода обратного дифференцирования (BDF) исходной системы можно получить следующую зависимость выходного сигнала в узле u_1 от значений напряжения на входах V_1 , V_2 (рис. 2). Значение u_1 мало (FALSE) тогда и только тогда, когда V_1 и V_2 имеют наибольшее значение (TRUE). На рисунке изображены численные результаты моделирования. Например, можно видеть, что отрезки времени [10 нс, 15 нс] и [50 нс, 55 нс] являются критическими при оценке уровня напряжения. И поэтому при установке порогового напряжения необходимо учитывать разницу двумя минимальными значениями: 1) локального минимума в точках (12,5 + 40н) нс; 2) почти постоянного минимального значения на отрезках [(25 + 40н) нс, (30 + 40н) нс].

Задача по упрощению систем дифференциально-алгебраических уравнений для расчета даже такого простого элемента электронной цепи имеет важное значение, поскольку позволяет уменьшить дифференциальную часть без изменения степени гладкости коэффициентов. В качестве объекта упрощения выберем общий вид линейной системы.

Рассматриваемые системы

Рассматриваются системы линейных дифференциально-алгебраических уравнений. Напомним, что дифференциально-алгебраической системой называется система уравнений вида [11]

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = f, \quad (1)$$

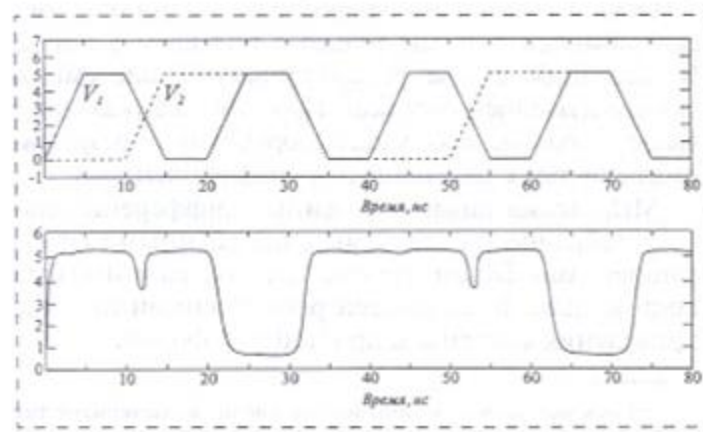


Рис. 2. Выходной сигнал в узле 1

$A(t)$, $B(t)$ — коэффициенты, зависящие от переменной $t \in S \subset \mathbb{R}_1$.

Старший коэффициент $A(t)$ системы (1) является, вообще говоря, вырожденным, т. е. соответствующая матрица вырождена. Поэтому система (1) может содержать и чисто алгебраические уравнения.

Основной задачей, которой посвящена данная статья, является задача о приведении системы дифференциально-алгебраических уравнений к простейшему виду, т. е. к виду, при котором система содержит минимальное число дифференциальных уравнений.

Простейшим случаем систем указанного типа является случай систем с постоянными коэффициентами. Наиболее известные [12] из уже существующих методов исследования систем с постоянными коэффициентами — это методы, связанные с приведением системы к *нормальной форме Кронекера*, а также метод, в котором используется так называемый проектор Дрэзина и спектральные проекторы. В ином подходе [13] для упрощения системы используется разбиение с помощью специальной последовательности проекторов, называемой *цепным проектором*. В работе [14] для упрощения систем был предложен специальный метод выбора последовательности проекторов (*канонические проекторы*). В работе [15] этот метод был усовершенствован. А именно, оказалось, что при выполнении определенных условий, накладываемых на коэффициенты, исходная система может быть сведена к нормальной форме Кронекера с *нильпотентной цепной матрицей Жордана* в качестве коэффициента при производной в одной из двух получающихся подсистем.

Приведение к нормальной форме Кронекера позволяет разделить исходную систему на две подсистемы: дифференциальную, разрешенную относительно производной неизвестной функции, и дифференциальную, разрешенную относительно самой функции. Но при этом общее число дифференциальных уравнений не уменьшается.

Отметим также, что в перечисленных работах рассматриваются системы только с индексом 1 или 2. В настоящей статье рассматриваются системы с любым значением индекса². При этом все указанные выше методы не дают удовлетворительного результата для систем с переменными коэффициентами.

Мы рассматриваем линейные дифференциально-алгебраические системы с переменными коэффициентами. Будем требовать, чтобы ранг $A(t)$ был постоянным. В настоящей работе описан процесс приведения системы к простейшей форме.

²Здесь под *индексом* понимается число, характеризующее количество формальных операций дифференцирования, необходимых для редукции системы к некоторому простому виду.

Определение. Простейшим видом (или простейшей формой) системы будем называть один из двух видов системы:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} x = f \text{ (1-я простейшая форма)}$$

$$\text{или } \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = f \text{ (2-я простейшая форма),}$$

где B_{11} — некоторая матрица, зависящая, вообще говоря, от переменной t .

Здесь и далее в этой работе под словами *упрощение системы* будем понимать приведение системы к простейшему виду, указанному в данном определении, а под словами *упрощение матрицы* —

приведение матрицы к виду $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ниже мы перечислим преобразования, которые используются для упрощения системы, после чего опишем общую итерационную схему и затем построим итерационную процедуру по указанной схеме, подробно описав каждый шаг.

Используемые преобразования

Будем рассматривать класс линейных систем с *постоянным рангом*. А именно, рассматриваем системы вида

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),$$

где $x \in E_1$, $f(t) \in E_2$; $t \in S \subset \mathbb{R}_1$, E_1 , E_2 — некоторые линейные пространства,

$$A(t), B(t): E_1 \rightarrow E_2,$$

зависящие от t гомоморфизмы линейных пространств, для которых выполнено условие³ $\text{rank } A(t) = \text{const}$.

Сведение системы к простейшему виду осуществляется двумя типами преобразований. Первый тип — умножение системы слева на невырожденную матрицу D . Это преобразование можно рассматривать, как преобразование в пространстве E_2 . При этом система

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t)$$

переходит в систему

$$DA(t)x'(t) + DB(t)x(t) = Df(t).$$

³В дальнейшем (при описании итерационной процедуры) мы наложим также дополнительные условия постоянства ранга.

Второй тип — преобразование в пространстве E_1 . При этом система

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t)$$

переходит в систему

$$A(t)[Px(t)]' + B(t)[Px(t)] = f(t).$$

Здесь $D(t)$ и $P(t)$ автоморфизмы пространств E_1 и E_2 . Попробуем теперь с помощью конечного числа таких преобразований выделить дифференциальную часть в нашей системе (1). Преобразование системы с помощью $D(t)$ и $P(t)$ можно описать в виде следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{A \frac{d}{dt} + B} & E_2 \\ P(t) \downarrow & & \downarrow D(t) \\ E_1 & \xrightarrow{\tilde{A} \frac{d}{dt} + \tilde{B}} & E_2 \end{array}$$

Упрощение системы

Опишем последовательность шагов по приведению системы к простейшей форме.

1. Сначала упрощаем матрицу $A(t)$ (приводим к виду $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$). Это делается достаточно просто (см. ниже).

2. Далее преобразуем коэффициент $B(t)$ для приведения его к виду, указанному в определении простейшего вида системы. При этом, вообще говоря, мы уменьшаем размерность системы (исключая получившиеся алгебраические уравнения, разрешенные относительно компонент вектора решения и условия согласования на значения правых частей исходной системы).

Преобразование матрицы $B(t)$ является более сложной процедурой и будет проводиться по некоторой итерационной схеме.

Итак, сначала упрощаем коэффициент A . Именно с помощью преобразований $D(t)$ и $P(t)$ сводим этот коэффициент к виду:

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Это можно сделать благодаря тому, что (по условию) матрица A имеет постоянный ранг. Применение преобразований $D(t)$, $P(t)$ к исходной системе, приводит ее к виду

$$DAPx'(t) + [DAP' + DBP]x(t) = \tilde{f}(t), \quad (3)$$

где $DAP = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Здесь для простоты аргумент t у

матриц D , P , A , B опущен и через $\tilde{f}$ обозначено новое (преобразованное) значение правой части.

Далее нам необходимо привести коэффициент B к достаточно простому виду. И поскольку теперь в ходе дальнейших преобразований нужно сохранять канонический вид (2) коэффициента A , то преобразования D , P должны иметь специальную форму, а именно:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

причем $D_{11}P_{11} = 1$, а матрицы D_{22} и P_{22} — произвольные и обратимые.

Такая структура и размерность матриц D и P соответствуют разбиению пространства E_1 на подпространства E_{11} , E_{12} и пространства E_2 на подпространства E_{21} , E_{22} :

$$E_1 = E_{11} \oplus E_{12}, \quad E_2 = E_{21} \oplus E_{22},$$

где

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \ker A, \quad E_{11} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_1 / \ker A,$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{im} A, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} = E_2 / \operatorname{im} A.$$

При этом получается, что

$$\dim E_{11} = \dim E_{21} = \operatorname{rank} A.$$

Система (3) после преобразований (4) приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} x(t) = \tilde{f}(t), \quad (5)$$

где

$$\tilde{f}(t) = Df(t);$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{11} = & D_{11}P'_{11} + D_{11}B_{11}P_{11} + D_{12}B_{21}P_{11} + \\ & + D_{11}B_{12}P_{21} + D_{12}B_{22}P_{21}; \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_{12} = (D_{11}B_{12} + D_{12}B_{22})P_{22}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{21} = & D_{22}B_{21}P_{11} + D_{22}B_{22}P_{21} = \\ = & D_{22}(B_{21}P_{11} + B_{22}P_{21}); \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_{22} = D_{22}B_{22}P_{22}.$$

Для упрощения записи вернемся снова к обозначению B вместо $\tilde{B}$ и к f вместо $\tilde{f}$, имея в виду уже преобразованные значения.

Теперь применяем итерационную процедуру по упрощению матрицы B .

1-й итерационный шаг

Сначала приводим элемент B_{22} коэффициента B к виду:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Это можно сделать аналогично тому, как мы упрощали матрицу A , естественно при условии

$$\text{rank } B_{22} = \text{const}. \quad (8)$$

Сформулируем это условие в терминах исходных коэффициентов A и B . Заметим, что B_{22} действует в пространствах E_{12} , E_{22} , или, в других обозначениях

$$\ker A \xrightarrow{B|_{\ker A}} E_2/\text{im } A,$$

($B_{22} = B|_{\ker A}$). Тогда условие (8) можно записать следующим образом:

$$\text{rank}(B|_{\ker A}) = \text{const}.$$

После приведения матрицы B_{22} к виду (7) и нескольких дополнительных элементарных преобразований получаем систему (с естественными обозначениями)

$$\left. \begin{aligned} x_1' + B_{11}x_1 + B_{12}^2x_3 &= f_1(t); \\ x_2 &= f_2(t); \\ B_{21}^2x_1 &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При этом для переменной x_2 получаем точное выражение

$$x_2 = f_2(t).$$

Рассмотрим теперь два оставшихся уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1' + \tilde{B}_{11}x_1 &= f_1(t) - B_{12}^2x_3; \\ B_{21}^2x_1 &= f_3(t) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Независимо от значения коэффициента B_{12}^2 компонента x_3 вектора решения выбирается произвольно, а x_1 есть решение дифференциального уравнения, которое должно удовлетворять условию $B_{21}^2x_1 = f_3(t)$. Поэтому решение такой задачи возможно не при любых значениях f_i в правой части. И на следующих этапах преобразований будут появляться дополнительные условия согласования.

Следующим этапом итерационного шага является приведение⁴ блока B_{21}^2 к виду

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

И здесь очевидно необходимо наложить следующее условие постоянства ранга:

$$\text{rank } B_{21}^2 = \text{const}.$$

Заметим, что B_{21}^2 — это матрица отображения $B|_{[E_1/\ker A]}$, действие которого можно описать с помощью следующей диаграммы:

$$E_1/\ker A \xrightarrow{B|_{[E_1/\ker A]}} [E_2/\text{im } A]/\text{im } B_{22}.$$

Оператор $B_{22} = B|_{\ker A}$ был уже определен ранее.

Для упрощения B_{21}^2 мы используем преобразования, которые не только сохраняют нормальную форму A , но и текущую форму B . Нетрудно видеть, что эти преобразования D и P должны иметь такую форму:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & D_{13} \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 \\ P_{31} & 0 & P_{33} \end{bmatrix},$$

и удовлетворять условиям

$$D_{11}P_{11} = I, \quad D_{22}P_{22} = I$$

(матрицы D_{33} и P_{11} обратимы). Посмотрим к какому виду мы сведем систему. Представим элементы x_1, f_1, f_3 каждый в виде двух векторов:

$$x_1 = [x_{1a}, x_{1b}], \quad f_1 = [f_{1a}, f_{1b}], \quad f_3 = [f_{3c}, f_{3d}].$$

⁴Если на некотором шаге итерации блок $B_{21}^2 = 0$, то это означает конец итерационного процесса.

Тогда полученная система запишется в виде:

$$\begin{cases} x'_{1a} + B_{11}^{aa}x_{1a} + B_{11}^{ab}x_{1b} + B_{12}^ax_3 = f_{1a}, \\ x'_{1b} + B_{11}^{ba}x_{1a} + B_{11}^{bb}x_{1b} + B_{12}^bx_3 = f_{1b}, \\ x_2 = f_2, \\ x_{1a} = f_{3c}, \\ 0 = f_{3d}. \end{cases} \quad (12)$$

Теперь подставим значение x_{1a} в первое уравнение и в результате получим:

1) новую дифференциально-алгебраическую систему относительно переменной x_{1b}

$$\begin{cases} x'_{1b} + B_{11}^{bb}x_{1b} = f_{1b}^*, \\ B_{11}^{ab}x_{1b} = f_{1a}^*; \end{cases}$$

2) условие согласования для правой части

$$f_{3d} = 0;$$

3) несколько алгебраических уравнений, из которых однозначно определяются некоторые компоненты решения:

$$\begin{cases} x_2 = f_2; \\ x_{1a} = f_{3c}. \end{cases}$$

Введя обозначения

$$y = \begin{bmatrix} x_{1b} \\ x_{1a} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad g = \begin{bmatrix} f_{1b} - B_{11}^{ba}f_{3c} - B_{12}^bx_3 \\ f_{1a} - f_{3c} - B_{11}^{aa}x_{1a} - B_{12}^ax_3 \end{bmatrix},$$

получим новую систему

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} B_{11}^{bb} & 0 \\ B_{11}^{ab} & 0 \end{pmatrix} y = g. \quad (13)$$

Таким образом, после первого шага итерации мы пришли к системе, в которой главный коэффициент A имеет требуемую каноническую форму

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{и при этом уменьшили количество диффе-}$$

ренциальных уравнений в системе. На этом заканчивается 1-й итерационный шаг.

2-й итерационный шаг

Будем упрощать коэффициент $\begin{bmatrix} B_{11}^{bb} & 0 \\ B_{11}^{ab} & 0 \end{bmatrix}$ по уже рассмотренной итерационной процедуре, в которой каждый следующий шаг итерации начинается

с упрощения блока⁵ B_{22} , приводя его к виду $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

или, если $B_{22} = 0$, как в данном случае, с упрощения блока B_{21}^2 . Например, в системе (13) этому блоку отвечает блок B_{11}^{ab} , который и будем приводить к простому виду. При этом, естественно, надо потребовать, чтобы

$$\text{rank } B_{11}^{ab} = \text{const}. \quad (14)$$

Заметим, что B_{11}^{ab} — это матрица отображения, действие которого можно представить с помощью следующей диаграммы:

$$[E_1/\ker A]/\ker B_{21}^2 \xrightarrow{B_{11}^{ab}} \text{im } A \cap \text{im } B_{21}^2.$$

Сделаем важное замечание. В процессе приведения системы к простейшей форме мы последовательно разбиваем исходную матрицу коэффициента B системы (1) на подматрицы:

- сначала (после упрощения матрицы A) в (5) на подматрицы B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} ;
- затем (после приведения B_{22} к виду (7)) в свою очередь разбиваются B_{12} (на нулевую подматрицу и подматрицу B_{12}^2) и B_{21} (на нулевую подматрицу и подматрицу B_{21}^2).

И с этого момента до последнего шага итерации мы последовательно разбиваем на подматрицы блок B_{11} системы (5). Сначала, например, после приведения B_{21}^2 к виду (11) B_{11} разбивается на подматрицы B_{11}^{aa} , B_{11}^{ab} , B_{11}^{ba} , B_{11}^{bb} так, что $\dim B_{11}^{aa} = \text{rank } B_{21}^2$, и так далее. Запишем эту последова-

⁵Мы используем введенные выше обозначения для элементов матрицы коэффициента при алгебраической части системы.

тельность разбиения в виде схемы (используя другие индексы для подматриц):

$$B_{11} \rightarrow \left[\begin{array}{c|cc} B_{01} & & B_{02} \\ \hline & B_{11} & B_{12} \\ B_{03} & B_{13} & \begin{array}{cc} B_{21} & B_{22} \\ B_{23} & \end{array} \end{array} \right], \quad (15)$$

где в принятых обозначениях, например, B_{02} соответствует B_{11}^{ab} в системе (12). Разбиение при этом осуществляется так, что

$$\dim B_{(i)1} = \text{rank } B_{(i-1)2}.$$

Например, $\dim B_{11} = \text{rank } B_{02}$. Очевидно, что итерация заканчивается тогда, когда

$$\dim B_{m1} = \text{rank } B_{m2}$$

и $(m+2)$ -й шаг будет последним шагом итерации.

В диаграмме (15) выделением отмечены те блоки, постоянства рангов которых мы будем требовать на соответствующих шагах итерации. Если усилить эти условия и потребовать, чтобы

$$\text{rank } B_{11} = \text{const}, \quad (16)$$

то для сведения системы (1) к простейшему виду условие (16) будет достаточным, но не будет необходимым.

Завершение итерации

Итерационная процедура заканчивается на m -м шаге, где m такое, что $B_{(m-2)2} = I$ или $B_{(m-2)2} = 0$. При этом все оставшиеся дифференциальные и алгебраические уравнения в исходной системе будут сведены либо к условиям согласования на значения правых частей

$$f_i = 0,$$

либо к алгебраическим уравнениям вида

$$x_j = f_k.$$

Систему на этом последнем шаге итерационного процесса будем называть *финальной системой*.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Произвольная линейная дифференциально-алгебраическая система типа (1) может быть сведена к простейшему виду, если коэффициенты A и B этой системы удовлетворяют следующим условиям:

1) $\text{rank } A = \text{const}$;

2) $\text{rank}(B|_{\ker A}) = \text{const}$;

3) $\text{rank}(B|_{[E_1/\ker A]}) = \text{const}$;

4) $\text{rank } B_{11} = \text{const}$.

Следствие. Из условий, сформулированных в теореме, можно сделать следующие выводы:

1) условия 1, 2 и 3 являются необходимыми и достаточными для сведения системы, к виду (13);

2) чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия, надо ослабить условие 4, а именно, потребовать выполнения условий $\text{rank } B_{i2} = \text{const}$, где $i = 0, 1, \dots, m$; $m: \text{rank } B_{(m-1)2} = \text{rank } B_{((m)2)}$.

Пример. Рассмотрим пример конкретной системы и покажем, к какому результату можно прийти в ходе упрощения по построенной выше итерационной схеме. Пусть исходная система имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} y_1' + \varphi_{11}(t)y_1 + \varphi_{13}(t)y_3 = f_1(t); \\ \phantom{y_1' + \varphi_{11}(t)y_1 +} y_2 = f_2(t); \\ \varphi_{31}(t)y_1 = f_3(t). \end{array} \right\} \quad (17)$$

Все компоненты x_1, x_2, x_3 — скаляры. Как видно из системы (17), коэффициент A уже имеет каноническую форму, коэффициент B тоже имеет простой вид в соответствии с итерационной схемой. Поэтому в ходе упрощения и решения такой системы нам не потребуется проделывать все этапы (кроме последнего) на 1-м шаге итерации. Результат упрощения будет следующим:

а) если $\varphi_{31} = 0$, то имеем финальную систему вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' + \varphi_{11}y_1 = f_1 - \varphi_{13}y_3; \\ f_3 = 0; \\ y_2 = f_2, \end{array} \right.$$

где $f_3 = 0$ — условие согласования; y_3 — выбирается произвольно; $y_1 = y_1(t, C)$ — решение дифференциального уравнения;

б) если $\varphi_{31} \neq 0$, то при $\varphi_{13} = 0$ получим систему, в которой будет только два алгебраических уравнения и одно условие согласования, а дифференциальная часть будет полностью отсутствовать:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \tilde{f}_3, \\ y_2 = f_2, \\ f_1 - \tilde{f}_3' - \varphi_{11}\tilde{f}_3 = 0. \end{array} \right.$$

Наконец, при $\varphi_{13} \neq 0$ все компоненты решения определяются однозначно:

$$\begin{cases} y_3 = \frac{f_1}{\varphi_{13}} - \frac{\tilde{f}_3}{\varphi_{13}} - \frac{\varphi_{11}\tilde{f}_3}{\varphi_{13}}, \\ y_1 = \tilde{f}_3, \\ y_2 = f_2. \end{cases}$$

Заключение

Наиболее часто решение дифференциально-алгебраических систем (с переменными или постоянными коэффициентами) большой размерности необходимо при расчете, анализе и реконструировании фрагментов моделируемых электронных цепей (а также систем электронных цепей в целом). Метод, предложенный в настоящей работе, формализует процесс упрощения дифференциально-алгебраических систем. В этом методе используются не только линейные подстановки компонентов решения, которые обычно составляют основную часть циклов методов численного решения таких систем (например, методы Рунге — Кутты), но и дифференциальные подстановки. Это, в свою очередь, позволяет уменьшить количество дифференциальных уравнений в системе. Предложенный метод может быть использован в качестве алгоритма для численного решения задачи по упрощению.

В настоящей работе рассматривались системы дифференциально-алгебраических уравнений следующего типа:

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = f,$$

с накладываемыми на коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ системы условиями $\text{rank } A = \text{const}$, $\text{rank } (B|_{\ker A}) = \text{const}$, $\text{rank } B|_{[E_1/\ker A]} = \text{const}$, $\text{rank } B_{11}^{ab} = \text{const}$.

Был предложен способ упрощения системы — получения простейшей формы, т. е. такого вида системы, при котором она, во-первых, имеет наименьшее количество дифференциальных уравнений, и во-вторых, матрица B имеет вид

$$\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данном методе использована специальная итерационная процедура преобразования матрицы B . Итерация заканчивается тогда, когда мы приходим к финальной системе. Еще раз отметим тот факт, что предложенная схема применима для дифференциально-алгебраических систем с любым значением индекса.

Автор статьи выражает большую признательность и благодарность профессору Виктору Евгеньевичу Шаталову за ценные советы и оказанную помощь в работе над статьей.

Список литературы

1. Tischendorf C., März R. Recent results in solving differential-algebraic equations in circuit simulation // SIAM Journal. Scientific Computation. 1997. 18 (1): 139–159.
2. Марьяшкин Н. Я., Овчинников Е. Э., Белаш В. О., Глебов А. Л. Решение дифференциально-алгебраических систем схемотехнического анализа БИС. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
3. Непрерыв В. Расчет электрических цепей на персональной ЭВМ. М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. Tischendorf C. Solution of Index-2 Differential Algebraic Equations and its Application in Circuit Simulation. Дис., 1994.
5. Günther M., Feldman U. CAD-modelling of electric circuits. A classification with respect to structure and index. 1995. (рукопись).
6. Griepentrog E. Index reduction methods for differential-algebraic equations // Inst. für Mathem. Berlin: Humboldt-Univ. 1992. 92-1, P. 14–29.
7. Gear G. W. Differential-algebraic equations index transformations // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1993. 9: 39–47.
8. Gear G. W. The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations // IEEE Trans. Circuit Theory. CT-18. 1971. P. 89–95.
9. Gear G. W., Petzold L. R. ODE methods for the solution of differential-algebraic systems // SIAM J. Num. Anal. 1984. 21 (4). P. 716–728.
10. Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R. Numerical solution of initial value problems in differential-algebraic equations. Elvise Science Publishing Co. Inc., 1989.
11. März R., Griepentrog E. Differential-algebraic equations and their numerical treatment // Teubner Texte zur Mathematik. 1986. 88. Leipzig. Teubner.
12. Lewis F. L. A survey of linear singular systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. 5 (1): 3–36.
13. März R., Griepentrog E. Basic properties of some differential-algebraic equations // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. 1989. 8 (1): 25–40.
14. März R. On quasilinear index-2 differential-algebraic equations // Fachbereich Mathematik, 1992.
15. März R. Canonical projectors for linear differential-algebraic equations // Computers Math. Applic. 1996. 31 (4).
16. Шубин Е. А., Егоров А. Е. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных // Современные проблемы математики: фундаментальные исследования. Т. 30. М.: ВИНТИ, 1987.
17. Шабат Б. В., Лаврентьев М. А. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, Изд. 4, 1973.
18. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1977.
19. Hansen B. Linear differential-algebraic equations // Fachbereich Mathematik. Humboldt-Univ., 1992. 92-1. P. 30–38.
20. März R. Extra-ordinary differential-algebraic equations. Attempts to analysis of differential-algebraic systems // Fachbereich Mathematik. 1997. (93-13).
21. Winkle R., Lamour R., März R. How floquet theory applies to differential-algebraic equations // Journal of mathematical analysis and applications. 1996. 217: 372–394.
22. März R. Criteria for the trivial solution of differential-algebraic equations with small nonlinearities to be asymptotically stable // Fachbereich Mathematik. 1997. (97-13).
23. März R., Balla K. Transfer of boundary value conditions for daes of index-1 // SIAM Journal. Numerical Analysis. 1996. 33 (6): 2318–2322.
24. Shatalov V. Ye., Sternin B. Yu. Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory (Introduction to Ressurgent Analysis) // CRC-Press, 1995.
25. Левинсон Н., Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.